

**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**ANÁLISE ESTRUTURAL DE CHAPAS COM ORIFÍCIOS CIRCULARES
EM CONDIÇÃO DE ESTADO PLANO DE TENSÃO**

André Daher de Moura

São Paulo

2014

**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**ANÁLISE ESTRUTURAL DE CHAPAS COM ORIFÍCIOS CIRCULARES
EM CONDIÇÃO DE ESTADO PLANO DE TENSÃO**

Trabalho de formatura apresentado à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo para
obtenção do título de Graduação em Engenharia

André Daher de Moura

Orientador: Prof. Dr. Roberto Ramos Júnior

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica

São Paulo

2014

Moura, André Daher de
Análise estrutural de chapas com orifícios circulares em
condição de estado plano de tensão / A.D. de Moura. – São
Paulo, 2014.
160 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Chapas (Estrutura; Análise) 2.Função de tensão de Airy
3.Coodenadas bipolares 4.Furos circulares 5.Estado plano de
tensão I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.
Departamento de Engenharia Mecânica II. t.

RESUMO

Elementos estruturais de chapas são comuns em aplicações de engenharia, desde aplicações simples até a utilização na fuselagem de aeronaves. A integridade estrutural é um fator de segurança e de confiabilidade da peça e/ou do conjunto mecânico. Uma das principais causas de falhas em estruturas é o aparecimento de trincas, frequentemente originadas em regiões onde ocorrem concentrações de tensão. A presença de furos em chapas é um exemplo típico de agente concentrador de tensões e, desta maneira, a determinação dos fatores de concentração de tensão e as características da distribuição de tensões são fatores importantes para garantir a segurança da estrutura.

Neste trabalho, serão analisadas as componentes de tensão em chapas planas contendo orifícios circulares em condições de estado plano de tensão. Os carregamentos poderão ser aplicados tanto no contorno da chapa quanto no contorno dos orifícios. O método de solução abrangerá tanto o uso de métodos analítico-numéricos (uso da função de tensão de Airy e coordenadas bipolares) quanto métodos numéricos como o método dos elementos finitos. As análises computacionais serão feitas com o auxílio dos programas Maple para a abordagem analítico-numérica, e dos softwares Patran e Nastran para as análises por elementos finitos, sendo comparadas, sobretudo, as tensões circunferenciais nos bordos dos orifícios utilizando as duas metodologias propostas.

ABSTRACT

Plate elements are usually applied in engineering structures, from simple applications to aircraft fuselage. The structural integrity is a fundamental aspect related to the safety and reliability of mechanical equipment or devices. One of the main failure causes in structures is the occurrence of cracks, which are often observed in regions where stress concentration exists. Holes in plates are a typical example of stress concentrator and, so, the correct determination of stress concentration factors and the stress distribution characteristics are important factors to guarantee the structural safety.

In this work, stress components in plates with two circular holes under plane stress state will be analyzed. The loads may be applied not only in the borders of the plate, but also in the holes' borders. The solution method will include analytical-numerical methods (using the Airy stress function and bipolar co-ordinates) and numerical methods, such as the Finite Element Method. The computational analysis shall be done with Maple for the analytical-numerical part, and with Patran and Nastran for the Finite Element Method part. Finally the hoop stress along the holes' borders will be compared within both proposed methodologies.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	16
2.1	Conceitos básicos	16
2.1.1	Estado plano de tensão.....	16
2.1.2	Função de tensão de Airy.....	16
2.1.3	Concentração de tensão	17
2.2	Orifícios múltiplos em chapa sob tensão.....	17
2.2.1	Solução de Jeffery.....	17
2.2.2	Chapa com reforços ou inclusões	19
2.2.3	Chapa com furos de tamanhos diferentes	21
2.2.4	Utilização de furos de alívio de tensões.....	22
2.2.5	Análise de múltiplos furos circulares.....	24
2.2.6	Consideração da pressão interna.....	27
2.2.7	Impacto da excentricidade na interação elástica.....	27
2.2.8	Integrais independentes do trajeto: Integral J	28
2.2.9	Integrais independentes do trajeto: Integral M	30
2.2.10	Integrais independentes do trajeto: Integral L	31
2.2.11	Outros avanços e aplicações das integrais independentes do trajeto	32
3	MATERIAIS E MÉTODOS	34
3.1	Configurações dos estudos de caso	34
3.2	Método analítico-numérico	35
3.2.1	Descrição do problema em coordenadas bipolares.....	35
3.2.2	Campos de tensão fundamental e auxiliar	37

3.2.3	Expansão da tensão em séries de Fourier	40
3.2.4	Imposição das condições de contorno	41
3.2.5	Determinação das constantes desconhecidas	43
3.3	Método numérico.....	46
3.3.1	Teste do programa: exemplo de Kirsch	47
3.3.2	Casos estudados	47
3.3.3	Geometria.....	48
3.3.4	Malha	49
3.3.5	Propriedades.....	50
3.3.6	Condições de contorno e carregamentos	50
3.3.7	Extração e processamento de dados.....	51
4	RESULTADOS.....	52
4.1	Método analítico.....	52
4.1.1	Determinação de K	55
4.1.2	Determinação de β	56
4.1.3	Tensão radial $\sigma_\alpha(\theta)$	59
4.1.4	Tensão circumferencial $\sigma_\beta(\theta)$	60
4.1.5	Tensão de cisalhamento $\tau_{\beta\alpha}(\theta)$	60
4.1.6	Conferência de fórmulas da bibliografia	61
4.1.7	Fórmula da eq.(20).....	61
4.1.8	Fórmulas das eqs.(24), (25) e (26).....	62
4.1.9	Fórmulas da eq.(25)	63
4.1.10	Imposição das condições de contorno	64
4.1.11	Determinação das constantes desconhecidas	66

4.2	Método numérico.....	68
4.2.1	Verificação do método (problema de Kirsch).....	68
4.2.2	Variação da localização da pressão interna	69
4.2.3	Variação da posição relativa horizontal entre os furos	71
4.2.4	Variação do tamanho relativo entre os furos	71
4.2.5	Variação da posição relativa vertical entre os furos	72
5	CONCLUSÃO	76
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	77
7	ANEXOS	80
7.1	Anexo 1 – Programação para a determinação de K	80
7.2	Anexo 2 – Programação para o cálculo de $\beta(\theta)$ para o furo 1	82
7.3	Anexo 3 – Programação para o cálculo das tensões.....	85
7.4	Anexo 4 – Programação para a dedução das tensões a partir de h_χ	91
7.5	Anexo 5 – Programação da comparação das tensões radiais deduzidas com as propostas por Radi (2011).....	96
7.6	Anexo 6 – Programação para a verificação das tensões radiais deduzidas através da expansão em séries de Fourier	102
7.7	Anexo 7 – Programação para a conferência da eq.(27).....	105
7.8	Anexo 8 – Dedução das fórmulas das eqs.(31) a (35).....	115
7.9	Anexo 9 – Programação para a eq.(36)	125
7.10	Anexo 10 – Dedução das eqs.(37), (38) e (39)	131
7.11	Anexo 11 – Dedução das eqs.(40) a (44).....	134
7.12	Anexo 12 – Dedução das eqs.(45), (48) e (49) e programação para as eqs.(46)(47)	145
7.13	Anexo 13 – Dedução das eqs.(50) e (53) e programação para as eqs. (51), (52) e (54).....	151

7.14	Anexo 14 – Verificação do método de elementos finitos: programação para o problema de Kirsch	159
8	APÊNDICES.....	160
8.1	Apêndice 1 – Rotação do tensor das tensões.....	160

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Famílias de círculos coaxiais (Timoshenko & Goodier, 1980)	18
Figura 2 – Esquema geral de coordenadas (Jeffery, 1921).....	18
Figura 3 – Tensão máxima (Ling, 1948).....	19
Figura 4 – Variação da tensão efetiva de von Mises perto da inclusão circular, normalizada por p, para menor (a) e maior (b) excentricidade (Radi & Strozzi, 2009)	21
Figura 5 – Geometria e sistema de coordenadas (Iwaki & Miyao, 1980)	21
Figura 6 – Um furo com dois furos de alívio na direção de cisalhamento. À esquerda, em sequência, à direita, lado a lado (Neuber, 1985)	23
Figura 7 – Exemplos típicos de modelos de elementos finitos para: (a) um quadrante para o caso onde $d = D/3$, (b) um quadrante para o caso onde $d_1 = 2D/3$, (c) um quadrante para o caso onde $d_2 = D/4$ e $d_3 = 2D/3$ (Meguid, 1986)	24
Figura 8 – Conjunto duplo e periódico de orifícios circulares em zigue-zague em um sólido infinito sob tração (Isida & Igawa, 1991)	25
Figura 9 – Esquema de superposição para o método de alternância (Ting, Chen, & Yang, 1999)	26
Figura 10 – Padrões prováveis de microfratura para (a) fissura e microfuro; (b) furo grande e microfuros de várias formas; (c) furo alongado e microfuros a pequenas distâncias; (d) furo alongado com microfuros a longas distâncias. As flechas mostram a direção provável de propagação de fratura (Tsukrov & Kachanov, 1997)	28
Figura 11 – Um contorno envolvente de um defeito ilustrando a integral independente do trajeto (Honein, Honein, & Hernnmann, 2000)	29

Figura 12 – Gráfico de M^*, a integral adimensional M, como função da distância de separação $d^* = d/a_1$ entre os dois orifícios, com a chapa sob cisalhamento uniforme (Honein, Honein, & Hernnmann, 2000)	30
Figura 13 – Malhas de elementos finitos antes da coalescência (acima) e após (abaixo) para os ângulos de inclinação $11,25^\circ$ e $22,5^\circ$, respectivamente (Hu & Chen, 2009)	31
Figura 14 – Sistema de coordenadas bipolares para o problema de dois furos diferentes de raios r_1 e r_2, com pressões internas p_1 e p_2 e tensões normais uniformes σ_{11}^∞ e σ_{22}^∞ e de cisalhamento τ_{12}^∞ aplicadas no infinito (Radi E. , 2011)	35
Figura 15 – Exemplo de configuração simétrica simulada em elementos finitos	48
Figura 16 – Exemplo de configuração não simétrica simulada em elementos finitos	49
Figura 17 – Malha: delimitação das regiões com refinamento diferenciado	49
Figura 18 – Malha completa com refinamento diferenciado	50
Figura 19 – Aplicação de pressão interna em um furo	51
Figura 20 – Esquemas para a determinação do ângulo θ nos furos 1 (à direita) e 2 (à esquerda).....	51
Figura 21 – Fluxograma do cálculo das tensões radiais	52
Figura 22 – Fluxograma do cálculo de ϕ_1 e ϕ_n	53
Figura 23 – Fluxograma do cálculo de ψ_1 e ψ_n	53
Figura 24 – Fluxograma do cálculo das tensões cisalhantes	54
Figura 25 – Fluxograma do cálculo das tensões circunferenciais.....	54
Figura 26 – Fluxograma do cálculo do parâmetro K.....	55
Figura 27 – Gráfico da variação de K com a mudança do limite superior do somatório, para uma configuração de exemplo.....	55
Figura 28 – Gráfico da variação de β em função de θ.....	56

Figura 29 – Visão geométrica da coordenada β	57
Figura 30 – Coordenada β como arco capaz e outros ângulos relevantes	57
Figura 31 – Coordenada β como arco capaz, ângulos e medidas relevantes.....	57
Figura 32 – Gráfico da variação de β (dedução por arco capaz) em função de θ	58
Figura 33 – Gráfico da comparação entre β baseado na dedução de Radi (2011) e β deduzido como arco capaz	59
Figura 34 – Gráfico de $\sigma_\alpha(\theta)$ para o primeiro furo (esquerda) e segundo furo (direita).....	59
Figura 35 – Gráfico de $\sigma_\beta(\theta)$ para o primeiro furo (esquerda) e segundo furo (direita).....	60
Figura 36 – Gráfico de $\tau_{\beta\alpha}(\theta)$ para o primeiro furo (esquerda) e segundo furo (direita).....	60
Figura 37 – Gráfico da comparação entre $\sigma_{\alpha_Radi}^{(1)}$ e $\sigma_{\alpha_deduzido}^{(1)}$, para o furo 1	62
Figura 38 – Gráfico da comparação entre $\sigma_{\alpha_tensão_fund}^{(0)}$ e $\sigma_{\alpha_Fourier}^{(0)}$, para o furo 1	62
Figura 39 – Gráfico da subtração entre a fórmula deduzida e a da eq.(36) em função de $\alpha > 0$, com $m = 17$	65
Figura 40 – Gráfico da razão entre a fórmula deduzida e a da eq.(36) em função de $\alpha > 0$, com $m = 17$	65
Figura 41 – Gráfico interativo da subtração entre o coeficiente $A1$ deduzido e o proposto por Radi (2011), com variação manual dos parâmetros g_2, f_1 e f_2...	67
Figura 42 – Gráficos da subtração entre o coeficiente A_1 deduzido e o proposto por Radi (2011), com variação do parâmetro g_1	67
Figura 43 – Tensão circumferencial nos bordos de um furo submetido a pressão interna, exclusivamente, em função de θ: resultados analítico (à esquerda) e numérico (à direita).....	69

Figura 44 – Tensão circunferencial nos bordos de um furo submetido a pressão interna e carregamento uniaxial, em função de θ: resultados analítico (à esquerda) e numérico (à direita)	69
Figura 45 – Tensão circunferencial nos bordos dos furos no caso de pressão interna no furo 1, exclusivamente: à esquerda, resultados analíticos de Radi (2011) – Fig. 8.a adaptada; à direita, resultado obtido numericamente por elementos finitos	70
Figura 46 – Tensão circunferencial nos bordos dos furos no caso de pressão interna no furo 2, exclusivamente: à esquerda, resultados analíticos de Radi (2011) – Fig. 8.b adaptada; à direita, resultado obtido numericamente por elementos finitos	70
Figura 47 – Tensão circunferencial nos bordos dos furos no caso de pressão interna no furo 1, exclusivamente, em função da distância horizontal relativa entre os furos: à esquerda, resultados analíticos de Radi (2011) – Fig. 9.a adaptada; à direita, resultado obtido numericamente por elementos finitos	71
Figura 48 – Tensão circunferencial nos bordos dos furos no caso de pressão interna no furo 1, exclusivamente, em função do tamanho relativo entre os furos: à esquerda, resultados analíticos de Radi (2011) – Fig. 9.b adaptada; à direita, resultado obtido numericamente por elementos finitos	72
Figura 49 – Chapa infinita com dois furos circulares diferentes sob carregamento biaxial. O ângulo ζ define a orientação relativa das direções principais do campo de tensões remotas com respeito à coordenada x_1 (Radi E. , 2011)	72
Figura 50 – Tensão circunferencial para as configurações 11c (acima à esquerda), 12b (acima à direita) e 13c (abaixo)	73
Figura 51 – Variação dos Fatores de Concentração de Tensão (SCF) e a correspondente posição angular onde ocorre a tensão circunferencial máxima, com relação ao ângulo ζ para as condições de: 11c (gráficos superiores), 12b (gráficos ao meio) e 13c (gráficos inferiores). Adaptado de (Radi E. , 2011).....	75

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Relação de programas a serem utilizados	34
Tabela 2 – Primeiro grupo de simulações, relativo às Figuras 8 e 9 de Radi (2011)	47
Tabela 3 – Segundo grupo de simulações, relativo às Figuras 11,12 e 13 de Radi (2011)	73
Tabela 4 – Comparação dos resultados numéricos por elementos finitos com os analíticos de Radi (2011) para localização e magnitude da maior tensão ocorrida em cada caso	74

1 INTRODUÇÃO

Muitos problemas na área da engenharia envolvem os elementos estruturais de chapas. Furos nestes componentes geram concentrações indesejadas de tensão, que podem levar a trincas e à propagação destas, comprometendo a integridade estrutural da peça. A determinação dos fatores de concentração de tensão é, portanto, um fator decisivo na segurança da estrutura.

Para a obtenção de um projeto eficiente, econômico e confiável, além de haver técnicas capazes de reduzir concentrações de tensão em – ou próximo de – descontinuidades geométricas em estruturas de engenharia, é de extrema importância ter as ferramentas e modelos (analíticos e/ou numéricos) para calcular e prever o nível de tensões, deformações e os riscos envolvidos.

A maioria das soluções exatas existentes aplica-se apenas em condições livres de tensão nos bordos dos furos, apesar de em aplicações de engenharia, serem bem frequentes situações de furos pressurizados (Radi E. , 2011). Deste modo, este trabalho visa analisar as componentes de tensão e deformação em chapas planas contendo orifícios circulares com carregamentos variados, aplicando o modelo analítico desenvolvido por Radi (2011) e outros pesquisadores, e comparar com o uso de métodos numéricos.

A aplicação direta destes métodos é notada na indústria aeronáutica: em juntas por rebitagem em componentes estruturais, como por exemplo, na ligação entre a fuselagem e as cavernas ou reforçadores. Com a utilização de ligas de alumínio, atualmente, as juntas rebitadas tornaram-se o principal modo de fixação (Megson, 1999).

Além desta indústria, são observáveis outros campos de aplicação, como por exemplo, na fabricação de túneis, em que são necessárias previsões de movimentos e mudanças de tensão nas superfícies trabalhadas nos bordos do túnel (Carter & Booker, 1983).

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo serão revistos alguns conceitos básicos da Teoria da Elasticidade, necessários à compreensão do escopo do trabalho, e serão apresentadas as pesquisas mais relevantes realizadas na área.

2.1 Conceitos básicos

2.1.1 Estado plano de tensão

O estado plano de tensão é obtido quando uma chapa fina é carregada em seus contornos, cuja distribuição de carregamentos é uniforme ao longo da espessura e paralela ao plano da chapa. Como são nulas as componentes de tensão σ_z , τ_{xz} e τ_{yz} nas duas faces da chapa, pode-se admitir que também o serão no interior da chapa. Desta maneira, o estado de tensão, independente de z , é caracterizado apenas por σ_x , σ_y e τ_{xy} (Timoshenko & Goodier, 1980).

2.1.2 Função de tensão de Airy

A solução de problemas bidimensionais se resume a integrar as equações diferenciais de equilíbrio para atender às condições de contorno e à equação de compatibilidade de deformações. Para resolver estas equações, usualmente é utilizada a função de tensão de Airy χ , que deve satisfazer à equação biharmônica a seguir (Megson, 1999).

$$\Delta\Delta\chi = 0 \quad (1)$$

No caso de o problema ser formulado em coordenadas bipolares, a eq.(1) é modificada (Jeffery, 1921).

2.1.3 Concentração de tensão

A presença de entalhes, orifícios, ressaltos etc., em peças estruturais, leva a uma modificação da distribuição de tensões, e consequentemente à ocorrência de níveis mais elevados de tensão nas proximidades destes elementos concentradores de tensão. O fator de concentração de tensão é definido, para o caso de tensão normal, conforme a eq.(2), onde σ_{nom} é a tensão nominal (uma relação entre o esforço aplicado e a geometria do elemento que resulta na tensão média) e $\sigma_{máx}$ é a tensão máxima na borda do elemento concentrador de tensão, como um furo numa chapa (Peterson, 1966).

$$K_t = \frac{\sigma_{máx}}{\sigma_{nom}} \quad (2)$$

2.2 Orifícios múltiplos em chapa sob tensão

Em componentes estruturais, a presença de orifícios gera concentrações de tensões que podem resultar em propagação de trincas no material, levando à sua falha. Deste modo, torna-se imperativa uma avaliação precisa do fator de concentração de tensão nos componentes, de modo a garantir integridade estrutural e segurança em serviço.

2.2.1 Solução de Jeffery

A solução completa dada em coordenadas bipolares foi feita, inicialmente, por Jeffery, onde a família de curvas obtidas tomado-se uma das coordenadas (α ou β) com valor constante corresponde à uma família de círculos coaxiais (círculos cujos centros compartilham um mesmo eixo); ou seja, há dois eixos e duas famílias de círculos, como pode ser visto na Figura 1. Esta solução possibilita tratar de problemas como: chapa infinita contendo dois orifícios circulares, chapa semi-infinita com apenas um furo e disco circular com um furo excêntrico. As fórmulas de deformação e tensão foram deduzidas com uso da função de tensão de Airy e de mudança de sistema de coordenadas (Jeffery, 1921). A Figura 2 ilustra as coordenadas (α e β) utilizadas por Jeffery.

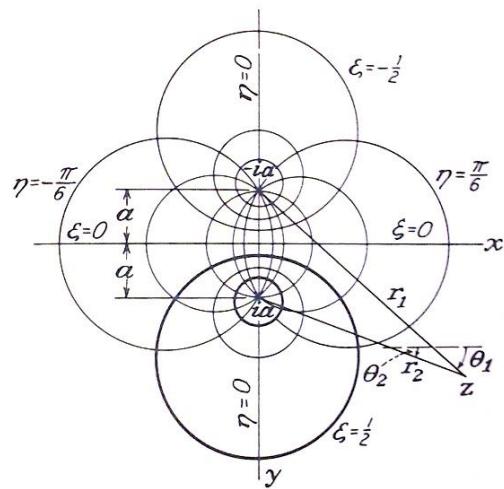


Figura 1 – Famílias de círculos coaxiais (Timoshenko & Goodier, 1980)

A função de tensão é obtida a partir de uma expressão geral, e seus coeficientes são determinados quando o carregamento na borda da chapa é expandido em séries de Fourier, pois o sistema como um todo está em equilíbrio. No mesmo trabalho, algumas aplicações são estudadas, como, por exemplo, o caso de um cilindro com furo excêntrico, cujas faces estão carregadas com pressões hidrostáticas diferentes, e o caso de uma chapa semi-infinita com furo circular sob pressão uniforme, que é o caso das tensões próximas de um rebite, em uma chapa (Jeffery, 1921).

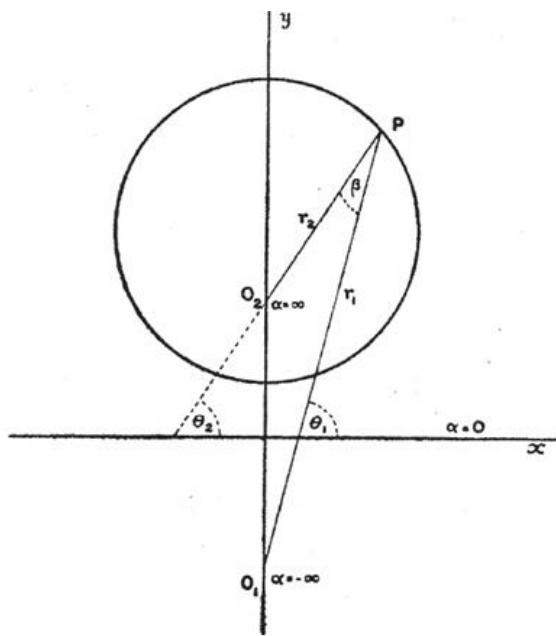


Figura 2 – Esquema geral de coordenadas (Jeffery, 1921)

Porém, o problema de uma chapa contendo dois furos iguais não foi trabalhado em sua plenitude. Um pouco diferente da solução de Jeffery, Ling (1948) propôs uma aproximação similar que correspondia a vários sistemas fundamentais de tensão atuando na chapa. Uma função biharmônica foi adicionada ao sistema de tensões de tal maneira que, no infinito, não houvesse nenhuma tensão. Os coeficientes paramétricos envolvidos na solução foram ajustados de modo a satisfazer as condições de contorno nos bordos dos furos. Tais coeficientes foram calculados com o auxílio de coordenadas bipolares, obtendo-se, ao final, expressões explícitas para eles. Foram discutidos três sistemas fundamentais de tensão, a saber: tensão biaxial e tensão uniaxial (em cada direção, longitudinal e transversal, separadamente). Em particular, foram calculados os valores máximos de tensão (Figura 3). Além disso, foram apresentadas as fórmulas para a tensão ao longo dos bordos dos furos. O caso limite, em que os furos são tangenciais, também foi discutido (Ling, 1948).

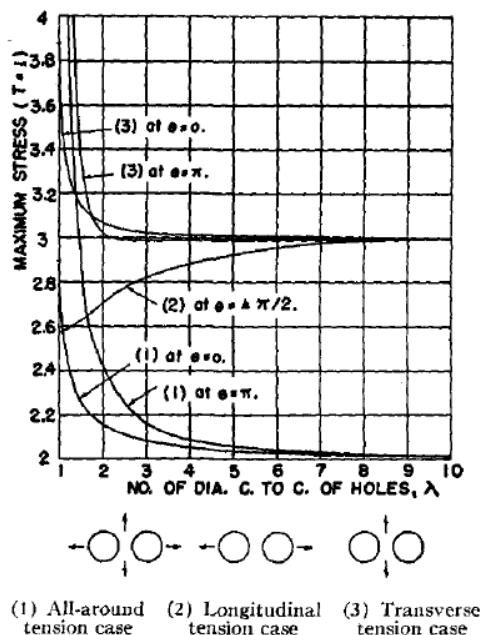


Figura 3 – Tensão máxima (Ling, 1948)

2.2.2 Chapa com reforços ou inclusões

De modo a considerar reforços (de mesmo material que a chapa) em ambos os orifícios, uma solução analítica foi desenvolvida por Dhir (1968) para a análise de

chapas sob carregamentos biaxiais. Um parâmetro adimensional proposto pelo autor foi definido como a razão entre a área seccional de material removido e a área total de reforço (área reposta). Deste modo há apenas dois valores paramétricos neste método, a saber: a razão que governa o tamanho e a separação dos orifícios, e a quantidade de material de reforço. O método de solução foi de sobrepor ao estado fundamental de tensões (sem os orifícios) um sistema auxiliar de tensões que não afetasse os carregamentos, mas que ajudasse a satisfazer as condições de contorno dos orifícios reforçados. Ou seja, uma função de tensão auxiliar foi adicionada à função de tensão fundamental de Airy. A função auxiliar de tensão utilizada foi a formulada por Jeffery, anteriormente. As tensões foram obtidas em coordenadas bipolares como séries infinitas de Fourier, cujas convergências numéricas eram governadas pela razão entre raio dos furos e o espaçamento entre eles. Os resultados foram computados como fatores de concentração de tensão para um número de geometrias de furos e reforços que frequentemente ocorrem na prática (Dhir, 1968).

Recentemente, Radi e Strozzi (2009) apresentaram uma solução analítica para tensões e deformações em um disco elástico e isotrópico induzidas por ajuste com interferência de uma inclusão circular, mas excêntrica ao disco. O disco era submetido a tensões normais uniformes em sua borda externa. A inclusão era do mesmo material que o disco e ambos os elementos estavam ou em estado plano de tensão ou em estado plano de deformação. Foi admitida a hipótese de contato sem atrito entre as duas peças para que, assim, houvesse apenas pressões de contato normais entre os dois corpos. A solução foi obtida usando a expressão geral de Jeffery para uma função de tensão biharmônica em coordenadas bipolares, com a função de tensão de Airy na forma de séries infinitas de Fourier para os campos de tensão e deformação. Os resultados mostraram que a tensão máxima efetiva de von Mises devido à interferência com a inclusão ocorreu em ajustes com maior excentricidade, mas ela se afasta do eixo de simetria para pequenas excentricidades (Figura 4) (Radi & Strozzi, 2009) .

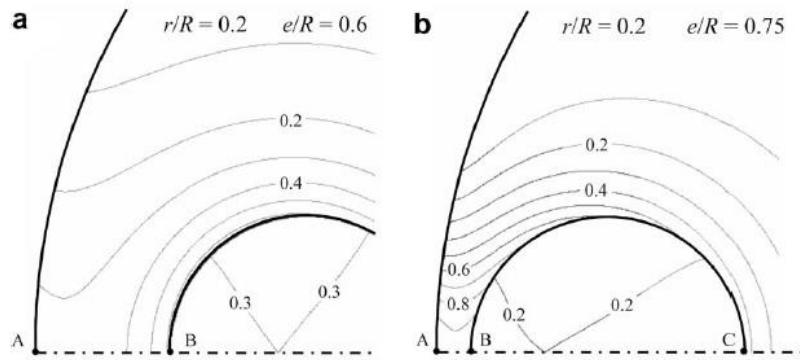


Figura 4 – Variação da tensão efetiva de von Mises perto da inclusão circular, normalizada por p , para menor (a) e maior (b) excentricidade (Radi & Strozzi, 2009)

2.2.3 Chapa com furos de tamanhos diferentes

Para o caso de furos circulares de tamanhos diferentes (Figura 5), Iwaki e Miyao (1980) propuseram uma solução exata para as tensões em uma chapa infinita sob três carregamentos fundamentais: tensão uniforme em direção arbitrária, pressão interna em um furo, um furo sob cisalhamento uniforme. A função de tensão requerida foi definida como uma soma de três funções de tensão: uma função de tensão base (situação de uma chapa infinita com um furo circular sob tensão) somada a outras duas que especificavam o sistema de tensões necessário para satisfazer as condições de contorno, tanto nas bordas dos furos quanto no infinito (Iwaki & Miyao, 1980).

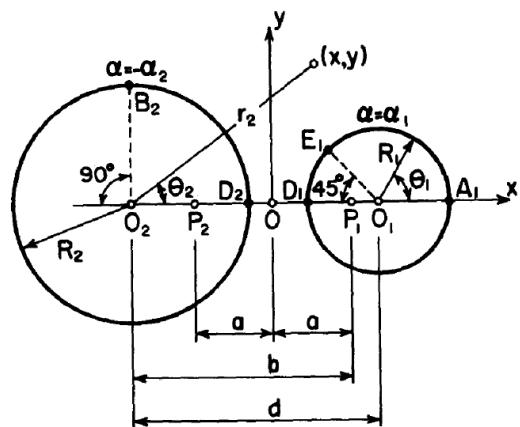


Figura 5 – Geometria e sistema de coordenadas (Iwaki & Miyao, 1980)

Após a escolha de ambas as funções, as condições necessárias para a determinação de seus coeficientes foram reduzidas a um problema de solução de um sistema de

equações lineares. Expressões para a tensão circunferencial nas bordas dos furos foram explicitamente deduzidas e os fatores de concentração de tensão foram calculados. As tensões em uma chapa infinita com dois furos tangentes de tamanhos diferentes também foram discutidas, como na Figura 5, quando d equivale à soma dos raios dos furos (Iwaki & Miyao, 1980).

Uma solução geral foi proposta por Green (1940) para problemas de distribuições generalizadas de estado plano de tensão em uma chapa infinita contendo orifícios circulares de tamanhos variados e posições arbitrárias, sujeitos apenas a certas condições de convergência da solução. Foi utilizada uma função de tensão para o estado plano de tensões na ausência de orifícios. De modo a permitir o efeito dos orifícios, foi necessário um conjunto de funções de tensão para cada furo, que resultasse tensão nula no infinito e uma expressão de valor único para as tensões e deformações. Utilizando coordenadas polares fixas em cada orifício, ele indicou o método para estender os resultados de modo a permitir o efeito de algumas condições de contorno. O caso particular de uma chapa infinita sob tensão contendo três furos em sequência foi discutido. Em seguida foram obtidos alguns valores numéricos e comparados com experimentos já antes realizados, apesar da não consideração dos efeitos de borda (Green, 1940).

Tais resultados foram, com auxílio de transformações de coordenadas, utilizados por Hoang e Abousleiman (2008) para formular uma solução para a situação de uma chapa infinita com dois furos iguais ou diferentes sujeitos a uma tensão uniforme ao infinito e a pressões na região interna dos furos. Apesar da possível complexidade, esta aproximação pode ser generalizada para um grupo arbitrário de furos circulares de qualquer tamanho (Hoang & Abousleiman, 2008).

2.2.4 Utilização de furos de alívio de tensões

A concentração de tensões causada por um orifício pode ser aliviada com a utilização de outros orifícios menores, na proximidade do furo original, como exemplificado na Figura 6, suavizando a trajetória do fluxo de tensões principais causadas pelo furo original (Heywood, 1952). Seguindo este princípio, Erickson e Riley (1978) fizeram

um estudo sistemático utilizando métodos de foto-elasticidade bidimensional para determinar os tamanhos e posições otimizadas para os furos auxiliares para certo número de chapas com diferentes furos centrais e razões entre o diâmetro e a espessura da chapa (Erickson & Riley, 1978).

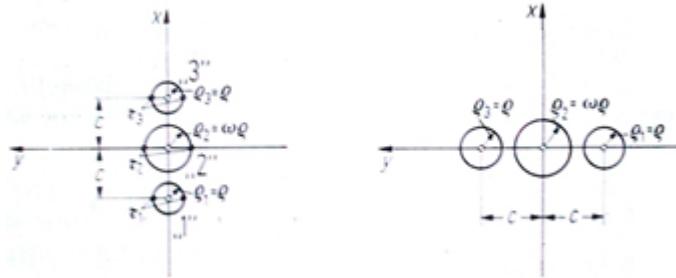


Figura 6 – Um furo com dois furos de alívio na direção de cisalhamento. À esquerda, em sequência, à direita, lado a lado (Neuber, 1985)

Meguid (1986) fez um estudo extenso sobre elementos finitos para o estado plano de tensão com diferentes configurações de furos de alívio mediante a concentração de tensões em uma chapa com carregamentos uniaxiais e dois furos alinhados (Figura 7). O estudo revelou que a introdução destes furos ajudou a suavizar a trajetória do fluxo de tensões principais e reduziu os efeitos do fator de concentração de tensão, além de melhorar a resistência e redução de peso. Com esta mudança nos valores máximos de tensão, houve uma melhora na vida à fadiga (Meguid, 1986).

Em um estudo posterior, uma solução geral descrevendo a interação entre o furo principal e um furo de alívio com posição arbitrária – sob condições de carregamento uni e biaxiais – foi formulada por Meguid e Shen (1992). A análise baseou-se nos potenciais complexos de Muskhelishvili, em um apropriado procedimento de superposição e em uma expansão em séries de Laurent, cujos coeficientes foram determinados a partir da condição de ausência de tensões nos bordos dos furos (Meguid & Shen, 1992).

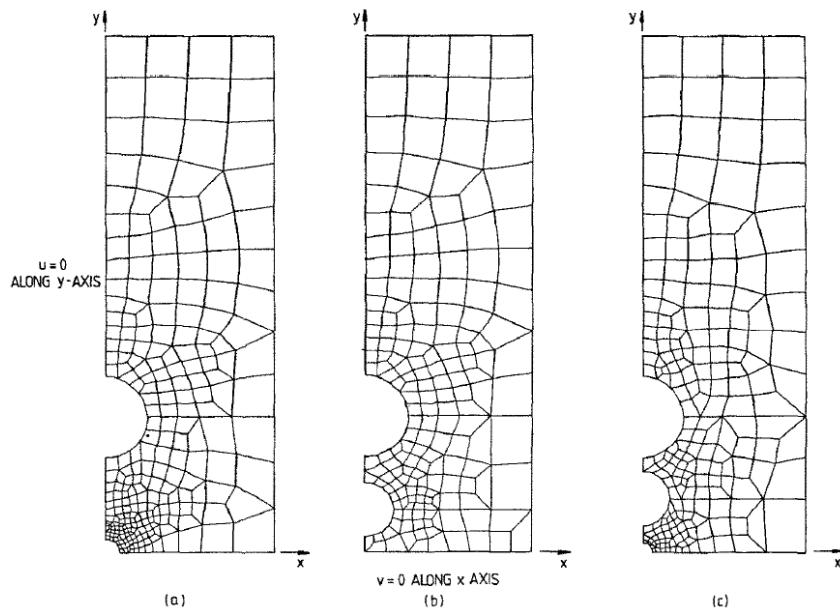


Figura 7 – Exemplos típicos de modelos de elementos finitos para: (a) um quadrante para o caso onde $d = D/3$, (b) um quadrante para o caso onde $d_1 = 2D/3$, (c) um quadrante para o caso onde $d_2 = D/4$ e $d_3 = 2D/3$ (Meguid, 1986)

Em particular, a variação na tensão circumferencial e o fator de concentração de tensões no furo principal foram obtidos em uma forma geral assintótica, enquanto que expressões de forma fechada explícitas pertencentes à solução de quarta ordem foram desenvolvidas utilizando uma técnica apropriada de perturbação. Soluções de ordem superior foram computadas e usadas para proporcionar uma descrição detalhada dos efeitos tanto dos carregamentos aplicados nos contornos quanto das configurações dos furos de alívio com respeito ao fator de concentração de tensões nos furos. Também foram estudados alguns casos com múltiplos furos. Este trabalho proporcionou uma ferramenta de design quantitativa e uma visão valiosa do efeito de furos de alívio na distribuição de tensões no furo principal em estruturas de engenharia (Meguid & Shen, 1992).

2.2.5 Análise de múltiplos furos circulares

Um conjunto de furos circulares dispostos em zigue-zague é um importante modelo de descontinuidades aleatoriamente distribuídas em materiais, além de ser um problema básico de concentrações de tensões. Através de uma análise teórica de um

conjunto genérico de furos circulares em zigue-zague em um sólido infinito sob tensão uniaxial, Isida e Igawa (1991) obtiveram resultados numéricos para as tensões máximas, para o fator de concentração de tensão e para o efeito da perfuração na rigidez à tensão do sólido para diferentes tamanhos de furo e posicionamentos. Nesta análise, foram utilizadas regiões unitárias adequadamente definidas e foi assumido potencial de tensões complexo na forma de séries de Laurent, cujos coeficientes foram determinados através das condições de contorno da região utilizada (como, por exemplo, o triângulo ODF da Figura 8). Para o cálculo numérico, foi utilizado um método baseado em forças e deslocamentos resultantes de elementos com parâmetros geométricos definidos (razão de distâncias entre furos e raios); a porosidade do sólido então foi calculada de modo a definir um fator adimensional para o fator de rigidez à tensão (razão entre o módulo de Young aparente e o do material original, sem furos). Os casos extremos também foram considerados, isto é, em que é produzida uma sequência de furos na direção longitudinal ou transversal, e o caso de furos em contato. Os resultados foram convenientemente ajustados em fórmulas polinomiais para aplicações de engenharia (Isida & Igawa, 1991).

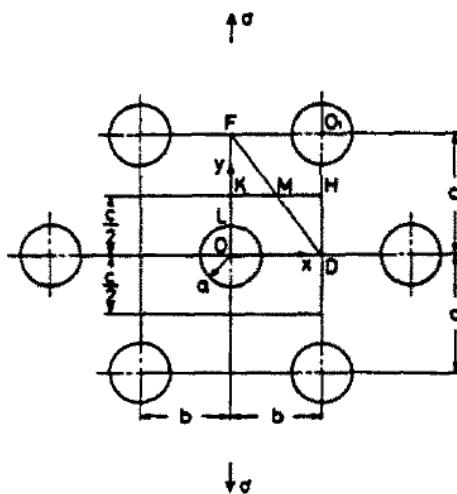


Figura 8 – Conjunto duplo e periódico de orifícios circulares em zigue-zague em um sólido infinito sob tração (Isida & Igawa, 1991)

Um método de alternância foi proposto por Ting, Chen e Yang (1999) para a análise de interação entre vários orifícios em um domínio infinito bidimensional. Inicialmente, foi derivada uma solução analítica para um único orifício circular em um domínio sob tensões de tração arbitrárias. Embora esta solução analítica já tenha

sido desenvolvida pelo método do complexo de Muskhelishvili em formas gerais, a solução elástica correspondente a trações arbitrárias expressa na forma de séries de Fourier foram completamente derivadas utilizando a função de tensão de Airy, objetivando simplicidade e eficiência. O problema de um sólido bidimensional infinito contendo orifícios circulares em estado plano de tensão, conforme a Figura 9 (a), pode ser expresso como superposição de dois casos: o caso em que uma força externa atua no infinito na ausência de orifícios (Figura 9 (b)) e o caso com múltiplos furos circulares sob trações fictícias ao longo dos bordos dos furos. Assim, a solução analítica anterior foi então utilizada no processo de superposições iterativas sucessivas capaz de satisfazer as condições de contorno para cada orifício circular do problema. Para a validação deste método, foram resolvidos diversos problemas de chapas perfuradas. As interações entre os orifícios foram estudadas em detalhe, e os resultados computados assemelharam-se às soluções de referência disponíveis, indicando a exatidão e a eficiência do método e mostrando que com uma técnica simples e mínimo esforço computacional é possível obter fatores de concentração de tensão precisos (Ting, Chen, & Yang, 1999).

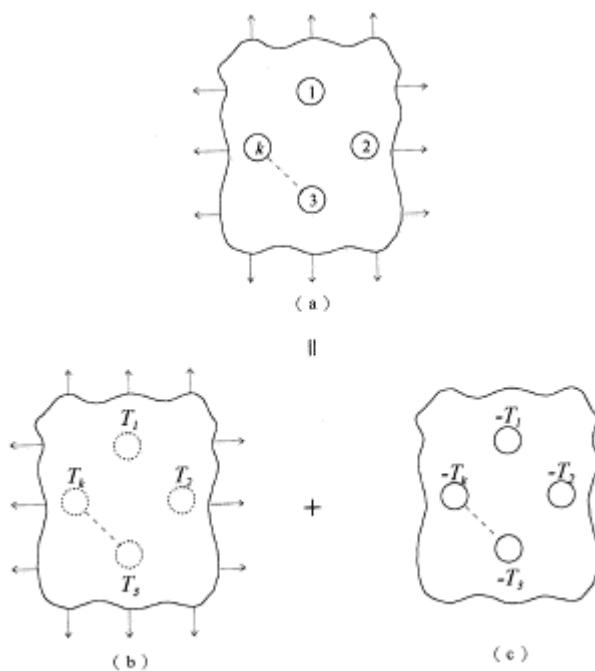


Figura 9 – Esquema de superposição para o método de alternância (Ting, Chen, & Yang, 1999)

2.2.6 Consideração da pressão interna

As interações elásticas entre furos com pressão interna foram analisadas no trabalho de Davanas (1992). Utilizando métodos matemáticos rigorosos, fórmulas foram deduzidas para a descrição destas interações. Foram obtidas soluções para as interações entre: dois furos de igual tamanho e pressão; um furo pressurizado e outro de igual tamanho sem pressão interna; um furo pequeno e pressurizado e um maior sem pressão interna; e entre dois furos de mesmo tamanho com tensões em suas superfícies de magnitude igual, mas de sinais opostos (ou seja, um pressurizado e outro com tensões de tração em sua superfície). Foi provado que, ao contrário do que era aceito até então, todas as interações elásticas entre furos são repulsivas. A magnitude desta força repulsiva tende a aumentar com o decréscimo da distância entre furos. Também foi observado que a periferia dos furos foi distorcida e não se manteve circular, o que é uma importante característica da interação entre furos (Davanas, 1992).

2.2.7 Impacto da excentricidade na interação elástica

Interações elásticas entre furos de diversas excentricidades, assim como entre fissuras, foram analisadas por Tsukrov e Kachanov (1997). Foram examinados os efeitos físicos produzidos pelas interações e os impactos da excentricidade do furo nestes efeitos. Foram objeto de interesse particular combinações de furos de diversas excentricidades e tamanhos com forte interação, já que tipicamente há poros ou microfissuras em materiais estruturais. Os impactos foram examinados em um modelo de orifícios elípticos, incluindo orifícios circulares e fissuras nos casos limite. Utilizando o método de alternância de Neumann-Schwarz, as interações foram estudadas de modo a tratar das seguintes questões: impacto da excentricidade dos furos nos efeitos de interação; interações entre furo grande e furo pequeno (como, por exemplo, a Figura 10); e padrões prováveis de microfratura em combinações de defeitos de diversas formas (Tsukrov & Kachanov, 1997).

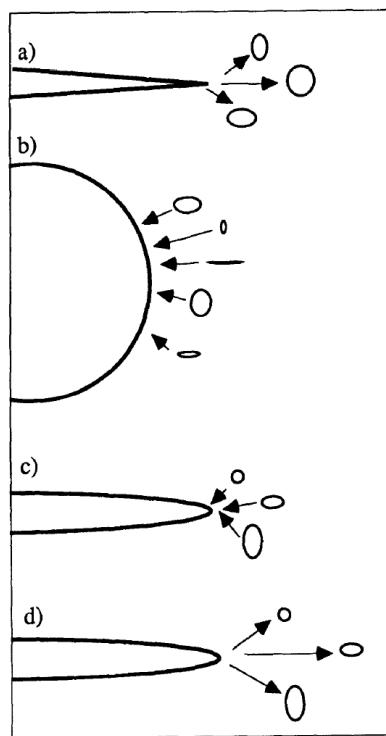


Figura 10 – Padrões prováveis de microfratura para (a) fissura e microfuro; (b) furo grande e microfuros de várias formas; (c) furo alongado e microfuros a pequenas distâncias; (d) furo alongado com microfuros a longas distâncias. As flechas mostram a direção provável de propagação de fratura (Tsukrov & Kachanov, 1997)

As interações entre furos podem tanto amplificar quanto atenuar tensões, dependendo da posição entre os furos, suas excentricidades e o modo de carregamento remoto. Padrões de concentração de tensão em tais combinações de furos implicam certos padrões de microfratura em materiais com múltiplos defeitos. Foi observado que os efeitos de interação entre furos (amplificando as tensões) são maximizados em configurações onde a simetria é levemente perturbada (Tsukrov & Kachanov, 1997).

2.2.8 Integrais independentes do trajeto: Integral J

A integral independente do trajeto J da mecânica da fratura está relacionada às taxas de dissipação de energia associadas a movimentos uniformes, rotação ou expansão de cavidades ou fissuras em materiais com elasticidade linear ou não. Formas de variáveis complexas foram apresentadas por Budiansky e Rice (1973) para as leis de conservação em casos de elasticidade linear isotrópica em estado plano de tensão.

Deste modo, para uma deformação bidimensional, a integral J , definida pela primeira componente do vetor da eq.(3), em que u é o vetor dos deslocamentos, C é a curva fechada no plano $x_1 x_2$, W é a densidade de energia e T o vetor de tensões atuantes no lado externo de C com versor normal n , possui o mesmo valor – não necessariamente zero – para todos os trajetos que circundam um furo ou fissura (Figura 11). As eqs.(4) e (5) descrevem as integrais de Knowles-Sternberg no caso bidimensional, em que ϵ_{ijk} é o tensor de alternância. Sob as mesmas condições de J , L torna-se zero. Para M se tornar zero, é necessário que W seja uma função quadrática (Budiansky & Rice, 1973).

$$J_k = \oint_C (W n_k - T_i u_{i,k}) dl \quad (3)$$

$$L = \oint_C \epsilon_{3ij} (W x_j n_i + T_i u_j - T_k u_{k,i} x_j) dl \quad (4)$$

$$M = \oint_C (W x_i n_i - T_k u_{k,i} x_i) dl \quad (5)$$

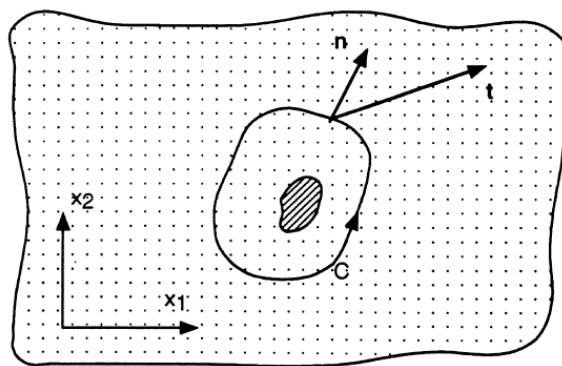


Figura 11 – Um contorno envolvente de um defeito ilustrando a integral independente do trajeto (Honein, Honein, & Herrmann, 2000)

Utilizando a solução para duas inclusões circulares elásticas sob tensão de cisalhamento, Honein, Honein e Herrmann (2000) avaliaram as forças no material. Elas podem ser definidas como mudanças energéticas (por exemplo, taxas de dissipação de energia) acompanhando translação unitária, expansão e rotação de inclusões. O vínculo entre as inclusões e a matriz foi assumido como perfeito e os cálculos foram executados usando o conceito das integrais independentes do trajeto

J , M e L . Os resultados obtidos são válidos para carregamentos arbitrários. Estes resultados foram exemplificados no caso de uma chapa sob tensão uniforme de cisalhamento com dois orifícios circulares: eles atraíram um ao outro e as integrais J e M cresceram sem limite quando os orifícios se tornaram infinitamente próximos. Uma análise cuidadosa da expressão destas integrais resultou que as integrais J e M tendem ao infinito proporcionalmente a $1/\sqrt{\epsilon}$, onde ϵ é a distância adimensional entre os orifícios (como ilustrado na Figura 12). Foi também notado que a integral J decai rapidamente a zero quando os orifícios situam-se a uma distância de quatro ou cinco raios. Foram considerados e discutidos outros exemplos com dois orifícios circulares e inclusões para vários campos de carregamentos. Notou-se que, com variação da tensão de cisalhamento remota, as forças no material podem ser atrativas ou repulsivas, dependendo da distância de separação entre os orifícios. (Honein, Honein, & Hernnmann, 2000).

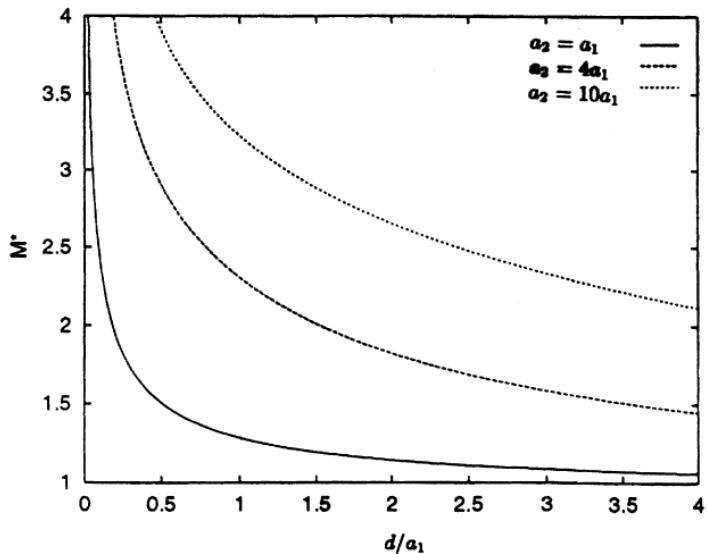


Figura 12 – Gráfico de M^* , a integral adimensional M , como função da distância de separação $d^* = d/a_1$ entre os dois orifícios, com a chapa sob cisalhamento uniforme (Honein, Honein, & Hernnmann, 2000)

2.2.9 Integrais independentes do trajeto: Integral M

A integral M teve seu conceito expandido por Hu e Chen (2009) para o estudo da degradação de uma tira plana frágil causada por evolução irreversível: a coalescência entre dois furos sob carregamento crescente. O foco do estudo foi a mudança da

integral M antes e depois da coalescência de dois furos vizinhos. Foram estudados em detalhe diferentes orientações dos dois furos e diferentes trajetos de coalescência conectando os bordos destes. Através de uma análise de elementos finitos (Figura 13), foi constatado que diferentes orientações dos furos levam a diferentes valores críticos da integral M , nos quais a tensão máxima circunferencial (ou seja, a tensão ao longo dos bordos de um furo) atinge a resistência do material e a coalescência ocorre; além disso, que o valor crítico mínimo da integral M corresponde aproximadamente ao carregamento crítico mínimo de tensão quando a orientação varia. Concluiu-se que a integral M desempenha um importante papel na descrição da medida da fratura e de sua evolução. Porém, isto apenas fornece algumas características variáveis externas. Isto significa que o mecanismo completo de falha devido à evolução da fratura não pode ser governado por apenas um parâmetro, e sim que há uma relação entre a integral M e a redução de módulo de elasticidade efetivo quando a orientação muda (quanto maior a integral, maior a redução). É de grande significância que a integral M está inherentemente relacionada à mudança da energia potencial total para a fratura em materiais frágeis independentemente das características da fratura e de sua evolução (Hu & Chen, 2009).

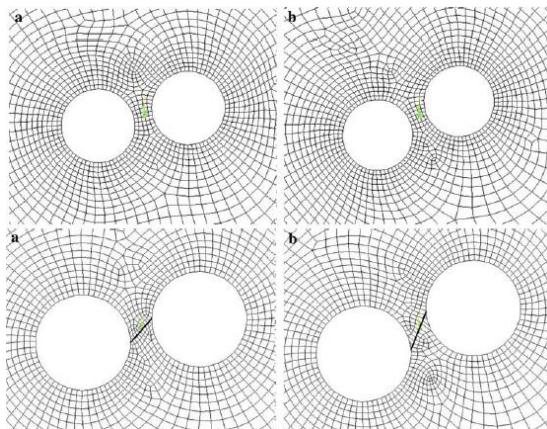


Figura 13 – Malhas de elementos finitos antes da coalescência (acima) e após (abaixo) para os ângulos de inclinação 11,25º e 22,5º, respectivamente (Hu & Chen, 2009)

2.2.10 Integrais independentes do trajeto: Integral L

O conceito da integral L também foi estendido por Hu e Shen (2011) para estudar a degradação de um material elástico frágil na coalescência entre dois furos vizinhos numa chapa plana sob tensão de tração; eles também estudaram a mudança da

integral L antes, durante e depois da coalescência. Utilizando análise por elementos finitos, estudou-se a influência de diferentes orientações dos dois furos, de trajetos de coalescência diferentes conectando os bordos dos dois furos e de diferentes comprimentos de trinca entre os bordos dos furos na integral L . Foi constatado que tendências variáveis da integral L antes, durante e depois da coalescência de diferentes orientações de furo apresenta características muito diferentes. Diferentemente da integral L para um único defeito, para dois furos antes da coalescência ela podia ser positiva ou negativa, representando dissipação ou absorção de energia induzida pela rotação dos furos, enquanto que tal característica desaparecia após a ocorrência da coalescência dos furos e consequentemente a aparição de um defeito complexo único. Concluiu-se que a integral L realmente desempenha um papel importante da descrição da medida da fratura e de sua evolução. Portanto, além da integral M , a integral L é outra característica externa que deve ser adotada na descrição da evolução da fratura em materiais frágeis. Desta maneira, indica-se que há uma ligação entre as integrais invariantes e a mecânica da fratura (Hu & Chen, 2011).

2.2.11 Outros avanços e aplicações das integrais independentes do trajeto

A partir de uma revisão de 261 referências, Chen e Lu (2003) puderam observar que novas aplicações para as integrais independentes do trajeto foram identificadas, focando em quatro áreas de aplicação: i) fratura mecânica de materiais funcionais (por exemplo, cerâmicas piezoelétricas e ferromagnetos), que exibem propriedades diferentes daquelas encontradas em problemas puramente mecânicos devido ao acoplamento com efeitos elétricos, magnéticos e térmicos; ii) danos mecânicos em trincas múltiplas interativas, assim como suas novas medições de fratura; iii) integrais de domínio, integrais de dois estados e suas aplicações em determinados parâmetros dominantes nas trincas tridimensionais e o esclarecimento do papel de termos singulares de ordem elevada nas expansões das funções principais de William e iv) nanoestruturas (Chen & Lu, 2003).

Dentre outras várias conclusões, Chen e Lu (2003) constataram que os papéis desempenhados pelas integrais invariantes na fratura de materiais funcionais (como por exemplo, piezoelétricos) são bem diferentes daqueles em materiais puramente

mecânicos. Apesar da diferença entre comportamentos mecânicos e elétricos, é possível tratar ambos de maneira semelhante utilizando o conceito de tensões generalizadas e novas leis de conservação de J_k foram estabelecidas para estes materiais com microtrincas. Além da conhecida teoria da mecânica da fratura, a integral M fornece uma nova e mais objetiva descrição do dano por microtrincas: ela representa a dissipação de energia devido às microtrincas e, deste modo, pode ser utilizada como medida quantitativa de dano. Por fim, a relação simples entre as integrais L e M se mantém até para fortes interações de múltiplas trincas. Assim, estas duas integrais não são independentes, mas representam duas taxas diferentes de dissipação de energia (Chen & Lu, 2003).

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Aqui serão descritos, além de outras ferramentas necessárias, os programas a serem utilizados na execução deste Trabalho de Conclusão de Curso, a saber:

Tabela 1 – Relação de programas a serem utilizados

Análise analítico numérica	Análise numérica
Maple	Patran e Nastran

3.1 Configurações dos estudos de caso

Nesta seção serão definidas as configurações de alguns casos para análise. O material será definido como comum a todos e haverá variação de certos parâmetros. De modo a possibilitar comparação com a literatura, os seguintes parâmetros serão utilizados tanto na abordagem analítica quanto na numérica, para uma análise preliminar:

- Parâmetros do material
 - $E = 210 \text{ GPa}$ – Módulo de Elasticidade
 - $\nu = 0,3$ – Coeficiente de Poisson
- Parâmetros geométricos dos furos
 - $r_1 = 15,5 \text{ mm}$ – Raio do primeiro orifício circular
 - $r_2 = 18,5 \text{ mm}$ – Raio do segundo orifício circular
 - $d = 44 \text{ mm}$ – Distância entre os centros dos furos
- Carregamento nos bordos da chapa
 - $\sigma_{11}^\infty = 1$ – Tensão transversal
 - $\sigma_{22}^\infty = 1$ – Tensão longitudinal
 - $\tau_{12}^\infty = 0$ – Tensão de cisalhamento
- Carregamento no interior dos furos
 - $p_1 = 0$ – Pressão no primeiro orifício
 - $p_2 = 0$ – Pressão no segundo orifício

Em seguida variar-se-ão parâmetros como: carregamentos externos (tensões transversal, longitudinal e de cisalhamento), pressões no interior dos orifícios, tamanhos dos raios destes. E, por fim, será realizada uma análise no caso de furos em posição relativa arbitrária.

3.2 Método analítico-numérico

O presente trabalho seguirá o modelo proposto por Radi (2011) com as devidas modificações. As suas deduções e referências serão mantidas de modo a explicitar o raciocínio adotado. Em seguida, será mostrado o programa implementado, utilizando as soluções deduzidas, para o cálculo das tensões e fatores de concentração de tensão almejados.

3.2.1 Descrição do problema em coordenadas bipolares

O problema é composto por dois orifícios circulares dispostos, inicialmente, lado a lado em uma chapa infinita, sob estado plano de tensões. Os dois furos são descritos pelos seus raios internos r_1 e r_2 , enquanto que a posição relativa entre eles é descrita pela distância d entre seus centros, conforme ilustra a Figura 14. Além dos carregamentos externos (tensões de tração e cisalhamento), podem existir pressões internas em cada furo.

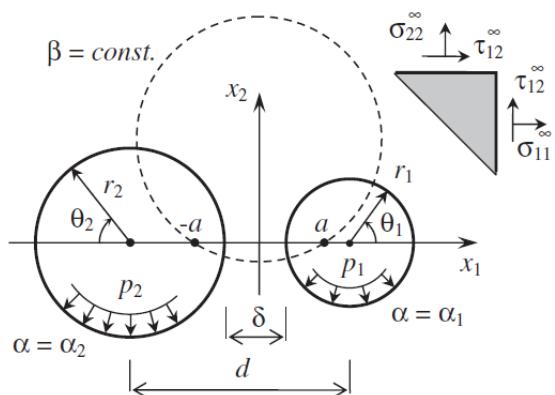


Figura 14 – Sistema de coordenadas bipolares para o problema de dois furos diferentes de raios r_1 e r_2 , com pressões internas p_1 e p_2 e tensões normais uniformes σ_{11}^{∞} e σ_{22}^{∞} e de cisalhamento τ_{12}^{∞} aplicadas no infinito (Radi E. , 2011)

As coordenadas cartesianas (x_1, x_2) são transformadas em coordenadas bipolares (α, β) conforme Jeffery (1921), definindo uma relação entre os planos complexos $z = x_1 + ix_2$ e $\omega = \alpha - i\beta$, conforme a eq.(6).

$$z = \operatorname{acoth} \left(\frac{\omega}{2} \right) = a \cdot \frac{e^{\omega} + 1}{e^{\omega} - 1} \quad \omega = \ln \left(\frac{z+a}{z-a} \right) \quad (6)$$

Através das relações entre as variáveis complexas z e ω , é imediato obter as relações abaixo:

$$x_1 = \frac{a \cdot \sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta)} \quad x_2 = \frac{a \cdot \sin(\beta)}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta)} \quad (7)$$

E também:

$$e^{\alpha} \sin(\beta) = \frac{2ax_2}{(x_1-a)^2+x_2^2} \quad e^{\alpha} \cos(\beta) = \frac{x_1^2+x_2^2-a^2}{(x_1-a)^2+x_2^2} \quad (8)$$

De onde, através da eliminação de β das eqs.(8), obtém-se a eq.(9) que descreve uma família de círculos coaxiais com centros no eixo x_1 a uma distância $a \cdot \coth(\alpha)$ da origem e raio $a/\sinh(\alpha)$.

$$(x_1 - a \coth(\alpha))^2 + x_2^2 = \frac{a^2}{\sinh(\alpha)^2} \quad (9)$$

E, com a eliminação de α das eqs.(7), obtém-se a eq.(10) que descreve uma nova família de círculos coaxiais com centros no eixo x_2 a uma distância $a/\operatorname{tg}(\beta)$ da origem e de raio $a/|\sin(\beta)|$:

$$x_1^2 + \left(x_2 - \frac{a}{\operatorname{tg}(\beta)} \right)^2 = \left(\frac{a}{\sin(\beta)} \right)^2 \quad (10)$$

Todos os parâmetros geométricos podem ser definidos em termos dos raios dos furos e a distância entre os centros dos furos. As superfícies dos furos circulares são definidas pela adoção de um valor constante para a coordenada α , ou seja, quando $\alpha = \alpha_1 > 0$ e $\alpha = \alpha_2 < 0$, como explicitado na Eq.(11). Na Eq. (12) também são mostradas a posição dos polos (a) e a distância entre os bordos dos furos (δ).

$$\alpha_1 = \operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{dr_1} \right) \quad \alpha_2 = -\operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 - r_1^2 + r_2^2}{dr_2} \right) \quad (11)$$

$$a = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(d^2 - r_1^2 - r_2^2)^2 - 4r_1^2 r_2^2}}{d} \quad \delta = d - r_1 - r_2 \quad (12)$$

Quanto ao ângulo polar θ , este é definido para um valor constante de α e é associado com a coordenada bipolar β pelas relações da eq.(13).

$$\sin(\theta) = \frac{\sinh(|\alpha|) \sin(\beta)}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta)} \quad \cos(\theta) = \frac{\cosh(\alpha) \cos(\beta) - 1}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta)} \quad (13)$$

3.2.2 Campos de tensão fundamental e auxiliar

O problema foi formulado utilizando as funções de tensão de Airy $\chi(x_1, x_2)$ que, conforme Jeffery (1921), devem satisfazer à equação biharmônica $\Delta\Delta\chi$, isto é, em coordenadas bipolares:

$$\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}(h_\chi) + 2 \cdot \frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}(h_\chi) + \frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}(h_\chi) + 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}(h_\chi) - 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(h_\chi) + h_\chi = 0$$

$$h_\chi = \frac{\chi(\cosh(\alpha) - \cos(\beta))}{a^2} \quad (14)$$

E, portanto, as tensões são dadas pelas equações:

$$\sigma_\alpha = \frac{\partial^2 h_\chi}{\partial\beta^2} \cdot (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) - \frac{\partial h_\chi}{\partial\alpha} \cdot \sinh(\alpha) - \frac{\partial h_\chi}{\partial\beta} \cdot \sin(\beta) + h_\chi \cdot \cosh(\alpha)$$

$$\sigma_\beta = \frac{\partial^2 h_\chi}{\partial\alpha^2} \cdot (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) - \frac{\partial h_\chi}{\partial\alpha} \cdot \sinh(\alpha) - \frac{\partial h_\chi}{\partial\beta} \cdot \sin(\beta) + h_\chi \cdot \cos(\beta) \quad (15)$$

$$\tau_{\beta\alpha} = -\frac{\partial^2 h_\chi}{\partial\beta\partial\alpha} \cdot (\cosh(\alpha) - \cos(\beta))$$

Mas, utilizando o princípio da superposição, a função de tensão de Airy pode ser decomposta na soma de uma função de tensão fundamental $\chi^{(0)}$ – que corresponde à tensão uniforme aplicada no infinito – e uma função de tensão auxiliar $\chi^{(1)}$ – responsável por satisfazer as condições de contorno nos bordos do furo, mas que se esvaiem no infinito. A partir dos carregamentos externos aplicados no infinito, a função de tensão fundamental pode ser descrita em coordenadas bipolares conforme a eq.(18), a seguir, pois:

$$\chi^{(0)} = -\tau_{12}^{\infty}x_1x_2 + \frac{1}{2}\sigma_{11}^{\infty}x_2^2 + \frac{1}{2}\sigma_{22}^{\infty}x_1^2 \quad (16)^1$$

É igual a

$$\chi^{(0)} = \left[\frac{\sigma_{11}^{\infty} \sin^2(\beta) + \sigma_{22}^{\infty} \sinh^2(\alpha) - 2\tau_{12}^{\infty} \sin(\beta) \sinh(\alpha)}{(\cosh(\alpha) - \cos(\beta))^2} \right] \frac{a^2}{2} \quad (17)^2$$

E resulta

$$h_{\chi}^{(0)} = \frac{\sigma_{11}^{\infty} \sin^2(\beta) + \sigma_{22}^{\infty} \sinh^2(\alpha) - 2\tau_{12}^{\infty} \sin(\beta) \sinh(\alpha)}{2(\cosh(\alpha) - \cos(\beta))} \quad (18)$$

Deste modo, deduzem-se as tensões fundamentais:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^{(0)} &= \frac{1}{(\cosh(\alpha) - \cos(\beta))^2} \cdot \left(\sigma_{11}^{\infty} \cdot (1 - \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta))^2 + \right. \\ &\quad \sigma_{22}^{\infty} \cdot \sinh^2(\alpha) \cdot \sin^2(\beta) - \\ &\quad \left. 2 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot (1 - \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta)) \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sin(\beta) \right) \\ \sigma_{\beta}^{(0)} &= \frac{1}{(\cosh(\alpha) - \cos(\beta))^2} \cdot \left(\sigma_{11}^{\infty} \cdot \sinh^2(\alpha) \cdot \sin^2(\beta) + \right. \\ &\quad \sigma_{22}^{\infty} \cdot (1 - \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta))^2 + \\ &\quad \left. 2 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot (1 - \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta)) \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sin(\beta) \right) \\ \tau_{\beta\alpha}^{(0)} &= \frac{1}{(\cosh(\alpha) - \cos(\beta))^2} \cdot \left((\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty}) \cdot (1 - \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta)) \cdot \right. \\ &\quad \sinh(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \\ &\quad \left. \tau_{12}^{\infty} \cdot (\sinh^2(\alpha) \cdot \sin^2(\beta) - (1 - \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta))^2) \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Em relação às tensões auxiliares, Jeffery (1921) deduziu não só a função de tensão auxiliar correspondente (eq.(20)), mas também as tensões auxiliares em função de várias constantes, conforme mostrado a seguir.

$$\begin{aligned} h_{\chi}^{(1)} &= (B\alpha + K \ln(\cosh(\alpha) - \cos(\beta))) (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) + \\ &\quad \sum_{n=1}^{\infty} (\phi_n \cos(n\beta) + \psi_n \sin(n\beta)) \end{aligned} \quad (20)$$

¹ Fórmula corrigida: em Radi (2011), a última parcela continha índice 2, enquanto que o correto é o apresentado (índice 1).

² Fórmula corrigida: em Radi (2011), faltou elevar ao quadrado o termo do denominador.

Onde

$$\begin{aligned}
\phi_I &= A_I \cosh(2\alpha) + B_I + C_I \sinh(2\alpha) \\
\psi_I &= a_I \cosh(2\alpha) + c_I \sinh(2\alpha) \\
\phi_n &= A_n \cosh((n+1)\alpha) + B_n \cosh((n-1)\alpha) + \\
&\quad C_n \sinh((n+1)\alpha) + D_n \sinh((n-1)\alpha) \\
\psi_n &= a_n \cosh((n+1)\alpha) + b_n \cosh((n-1)\alpha) + \\
&\quad c_n \sinh((n+1)\alpha) + d_n \sinh((n-1)\alpha)
\end{aligned} \tag{21}$$

para $n \geq 2$. Com as constantes $B, K, A_1, B_1, C_1, a_1, c_1, A_n, B_n, C_n, D_n, a_n, b_n, c_n, d_n$ a serem determinadas pelas condições de contorno, temos as componentes de tensão derivadas da função de tensão de Airy auxiliar:

$$\begin{aligned}
\sigma_\alpha^{(1)} &= -\frac{1}{2} K (\cosh(2\alpha) - 2 \cosh(\alpha) \cos(\beta) + \cos(2\beta)) - \\
&\quad - B \sinh(\alpha) (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) + \\
&\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\phi_n (\cosh(\alpha) \cos(n\beta) - n^2 (\cosh(\alpha) - \cos(\beta))) \cdot \right. \\
&\quad \left. \cos(n\beta) + n \sin(\beta) \sin(n\beta) \right) + \frac{1}{2} \psi_n \left(n^2 \cos(\beta) \sin(n\beta) - (n^2 - 1) \cdot \right. \\
&\quad \left. \cosh(\alpha) \sin(n\beta) - n \sin(\beta) \cos(n\beta) \right) \\
&\quad - \phi'_n \sinh(\alpha) \cos(n\beta) - \psi'_n \sinh(\alpha) \sin(n\beta) \Big) \\
\sigma_\beta^{(1)} &= \frac{1}{2} K (\cosh(2\alpha) - 2 \cosh(\alpha) \cos(\beta) + \cos(2\beta)) + \\
&\quad B \sinh(\alpha) (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) + \\
&\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\phi_n (\cos(\beta) \cos(n\beta) + n \sin(\beta) \sin(n\beta)) - \right. \\
&\quad \left. \phi'_n \sinh(\alpha) \cos(n\beta) + \phi''_n (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) \cos(n\beta) \right. \\
&\quad \left. + \psi_n (\cos(\beta) \sin(n\beta) - n \sin(\beta) \cos(n\beta)) - \right. \\
&\quad \left. \psi'_n \sinh(\alpha) \sin(n\beta) + \psi''_n (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) \sin(n\beta) \right) \\
\tau_{\beta\alpha}^{(1)} &= -(K \sinh(\alpha) + B \cosh(\alpha)) \sin(\beta) + \\
&\quad \frac{1}{2} B \sin(2\beta) + (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\phi'_n \sin(n\beta) - \psi'_n \cos(n\beta) \right) \right)
\end{aligned} \tag{22}$$

3.2.3 Expansão da tensão em séries de Fourier

Utilizando o resultado obtido por Ling (1948) para a integral da eq.(23), Radi (2011) pôde obter o campo de tensões fundamentais expandidos em séries de Fourier com β variando de $-\pi$ a π , conforme a eq.(24).

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\beta)}{(\cosh(\alpha) - \cos(\beta))^2} d\beta = \frac{2\pi e^{-n|\alpha|} (n + \coth(|\alpha|))}{\sinh(\alpha)^2} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^{(0)} &= S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (S_n \cos(n\beta) + s_n \sin(n\beta)) \\ \tau_{\beta\alpha}^{(0)} &= t_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (T_n \sin(n\beta) + t_n \cos(n\beta)) \end{aligned} \quad (24)$$

Onde

$$\begin{aligned} S_0 &= e^{-|\alpha|} (\sigma_{11}^{\infty} \cosh(\alpha) + \sigma_{22}^{\infty} \sinh(|\alpha|)) & S_n &= 2 (\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty}) g_n \sinh(|\alpha|) \\ T_n &= 2 (\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty}) g_n \sinh(\alpha) \\ s_n &= -4 \tau_{12}^{\infty} g_n \sinh(\alpha) \\ t_n &= 4 \tau_{12}^{\infty} g_n \sinh(|\alpha|) & t_0 &= -\tau_{12}^{\infty} e^{-2|\alpha|} \end{aligned} \quad (25)$$

para $n \geq 1$. Onde:

$$g_n = e^{-n|\alpha|} (\cosh(\alpha) - n \sinh(|\alpha|)) \quad (26)$$

Assim, somando as tensões fundamentais e as auxiliares, as trações totais nos bordos dos orifícios circulares (onde $\alpha = \text{constante}; \alpha_1 \text{ ou } \alpha_2$) podem ser obtidas, como descrito por Radi (2011) (eqs.(27) e (28)) e por Jeffery (1921).

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= S_0 + \phi_I - \frac{1}{2} \cdot (K \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) + B \cdot \sinh(2 \cdot \alpha)) + (K \cdot \cosh(\alpha) + B \cdot \sinh(\alpha)) \cdot \\ &\cos(\beta) - \frac{K}{2} \cdot \cos(2 \cdot \beta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot n} \cdot \left((\Phi_{n-1} - 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Phi_n + \Phi_{n+1} - \right. \\ &2 \cdot \sinh(\alpha) \cdot \Phi_n^* + 2 \cdot n \cdot S_n) \cdot \cos(n \cdot \beta) + (\Psi_{n-1} - 2 \cdot \Psi_n \cdot \cosh(\alpha) + \\ &\left. \Psi_{n+1} - 2 \cdot \Psi_n^* \cdot \sinh(\alpha) + 2 \cdot n \cdot s_n \right) \cdot \sin(n \cdot \beta) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}\tau_{\beta\alpha} = & t_\theta + \frac{1}{2} \cdot \psi_1 - (K \cdot \sinh(\alpha) + B \cdot \cosh(\alpha)) \cdot \sin(\beta) + \frac{B}{2} \cdot \sin(2 \cdot \beta) + \\ & \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(-\Phi_{n-1}^* + 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Phi_n^* - \Phi_{n+1}^* + 2 \cdot n \cdot T_n \right) \cdot \right. \\ & \left. \sin(n \cdot \beta) + \left(\Psi_{n-1}^* - 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Psi_n^* + \Psi_{n+1}^* + 2 \cdot t_n \right) \cdot \cos(n \cdot \beta) \right)\end{aligned}$$

Onde

$$\begin{aligned}\Phi_n = & (n-1) n (n+1) \phi_n & \Psi_n = (n-1) n (n+1) \psi_n \\ \Phi_n^* = & n \phi_n & \Psi_n^* = n \psi_n\end{aligned}\tag{28}$$

3.2.4 Imposição das condições de contorno

O campo de tensões deve atender às condições em duas áreas principais:

- i) No infinito
- ii) Nos bordos dos orifícios

O campo de tensões gerado pela função de tensão fundamental proporciona, no infinito, os carregamentos aplicados. Ao mesmo tempo, a função de tensão auxiliar deve extinguir-se no infinito. Deste modo, como já mostrado por Jeffery (1921), a eq.(29) deve ser satisfeita.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) = 0\tag{29}$$

Para os bordos dos orifícios circulares, a tensão total deve ser igual às pressões internas em cada furo, isto é, p_1 no primeiro furo e p_2 no segundo furo. Ou seja:

$$\sigma_{\alpha} = -p(\alpha) \quad \tau_{\beta\alpha} = 0, \text{ para } \alpha = \alpha_1, \alpha_2\tag{30}$$

Mas, com o auxílio de (27) aplicado em (30), podemos exigir que os termos do tipo $\sin(n\beta)$ e $\cos(n\beta)$ sejam eliminados para $n = 0, 1, 2, \dots$. Em particular, desaparecendo com os termos constantes ($n = 0$), obtém-se, para $\alpha = \alpha_1$ e $\alpha = \alpha_2$:

$$\begin{aligned}\phi_1 = & \frac{1}{2} K \cosh(2\alpha) + \frac{1}{2} B \sinh(2\alpha) - e^{-|\alpha|} \left(\sigma_{11}^{\infty} \cosh(\alpha) + \sigma_{22}^{\infty} \sinh(|\alpha|) \right) - p(\alpha) \\ \Psi_1'(\alpha) = & 2 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot e^{-2 \cdot |\alpha|}\end{aligned}\tag{31}$$

Além disso, eliminando os termos com $\sin(n\beta)$ e $\cos(n\beta)$ na eq.(30), para $n \geq 1$, são obtidas as equações a seguir, onde δ_{nk} é o Delta de Kronecker.

$$\begin{aligned} \Phi_{n-1} - 2\Phi_n \cosh(\alpha) + \Phi_{n+1} - 2\Phi_n^* \sinh(\alpha) + \\ 2(K \cosh(\alpha) + B \sinh(\alpha)) \delta_{n1} - 2K \delta_{n2} + 2n S_n = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{n-1} - 2\Psi_n \cosh(\alpha) + \Psi_{n+1} - 2\Psi_n^* \sinh(\alpha) + 2n S_n = 0 \\ \Psi_{n-1}^* - 2 \cosh(\alpha) \Psi_n^* + \Psi_{n+1}^* + 2t_n = 0 \\ 2\Phi_n^* \cosh(\alpha) - \Phi_{n-1}^* - \Phi_{n+1}^* - 2(K \sinh(\alpha) + B \cosh(\alpha)) \delta_{n1} + B \delta_{n2} + 2T_n = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Aplicando, em (33), uma multiplicação por $e^{-n|\alpha|}$ e somando para $n = 1 \dots \infty$, tem-se:

$$\Phi_1^* = 2K e^{-|\alpha|} \sinh(\alpha) + B - 4(\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty) \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-n|\alpha|} \sinh(\alpha) \right) \quad (34)$$

Se a eq.(33) é multiplicada por $\operatorname{senh}(m-n)\alpha$, para $m \geq 2$, fazendo-se a soma com $n = 1 \dots m-1$, utilizando (25) e (34), obtém-se:

$$\begin{aligned} \Phi_m^* = 2K e^{-m|\alpha|} \sinh(\alpha) + 4(\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty) \cdot \left(\sum_{n=1}^{m-1} g_n \sinh((m-n)\alpha) - \right. \\ \left. \sinh(m\cdot\alpha) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-n|\alpha|} \right) \end{aligned} \quad (35)$$

Cabe ressaltar que as séries apresentadas em (34) e (35) convergem para valores apresentados nas equações (36) e (37), reduzindo as equações (34) e (35) às formas apresentadas em (38) e (39):

$$\sum_{n=1}^{m-1} g_n \sinh((m-n)\alpha) = \frac{1}{4} \operatorname{sign}(\alpha) \left(\frac{\sinh(m-2)\alpha}{\sinh \alpha} + 2 e^{-m|\alpha|} \cosh \alpha - m g_m(\alpha) \right) \quad (36)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-n|\alpha|} = \frac{1}{4} \frac{e^{-2|\alpha|}}{\sinh(|\alpha|)} \quad (37)$$

$$\Phi_1^* = 2K e^{-|\alpha|} \sinh(\alpha) + B (\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty) e^{-2|\alpha|} \operatorname{sign}(\alpha) \quad (38)$$

$$\Phi_m^* = 2K e^{-m|\alpha|} \sinh(\alpha) - (\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty) m g_m \operatorname{sign}(\alpha) \quad (39)$$

De modo análogo, pode-se multiplicar as eqs.(32) por $\operatorname{senh}(m-n)\alpha$, para $m \geq 2$, e efetuar a soma com $n = 1 \dots m-1$, utilizando as eqs.(25), (31), (36) e (39), o

que leva às equações (40) e (41), cuja série apresentada em (42) pode ser simplificada, levando ao resultado apresentado em (43).

$$\Phi_m = -2K e^{-m|\alpha|} (\cosh(\alpha) + m \sinh(|\alpha|)) - 6(\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty) \cdot \left(\sum_{n=1}^{m-1} n g_n \sinh((m-n)|\alpha|) \right) \quad (40)$$

$$\Psi_m^* = 2 \tau_{12}^\infty m g_m \quad (41)$$

$$\sum_{n=1}^{m-1} n g_n \sinh((m-n)\alpha) = \frac{1}{6} m (m^2 - 1) e^{-m|\alpha|} \sinh(\alpha) \quad (42)$$

$$\Phi_m = -e^{-m|\alpha|} (2K (\cosh(\alpha) + m \sinh(|\alpha|)) + (\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty) m (m^2 - 1) \sinh(|\alpha|)) \quad (43)$$

Do mesmo modo a equação (32) pode ser multiplicada por $\sinh(m-n)\alpha$, para $m \geq 2$ e somada com $n = 1 \dots m-1$, usando (25), (41) e (42), o que resulta (Radi E. , 2011):

$$\Psi_m = 12 \tau_{12}^\infty \left(\sum_{n=1}^{m-1} n g_n \sinh((m-n)\alpha) \right) = 2 \tau_{12}^\infty m (m^2 - 1) e^{-m|\alpha|} \sinh(\alpha) \quad (44)$$

3.2.5 Determinação das constantes desconhecidas

Vários termos podem ser expressos em função da constante K . Caso esta seja calculada, é possível determinar as constantes A_1 , B_1 , C_1 e B através da imposição das condições (31) e (38) nas funções $\phi_1(\alpha)$ e $\phi_1'(\alpha)$ em $\alpha = \alpha_1$ e $\alpha = \alpha_2$. Deste modo, usando (28) e (21), obtém-se:

$$\begin{aligned} A_1 \cosh(2\alpha) + B_1 + C_1 \sinh(2\alpha) - \frac{1}{2} B \sinh(2\alpha) = \\ \frac{1}{2} K \cosh(2\alpha) - e^{-|\alpha|} (\sigma_{11}^\infty \cosh(\alpha) + \sigma_{22}^\infty \sinh(|\alpha|)) - p \end{aligned} \quad (45)$$

$$2A_1 \sinh(2\alpha) + 2C_1 \cosh(2\alpha) - B = 2K e^{-|\alpha|} \sinh(\alpha) - (\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty) e^{-2|\alpha|} \text{sign}(\alpha)$$

Que, caso seja avaliada nos valores constantes de α explicitados, as seguintes constantes são determinadas:

$$\begin{aligned}
A_I &= \frac{1}{D} \left(\cosh(\alpha_I + \alpha_2) \left(2f(\alpha_I) \sinh(\alpha_2)^2 - 2f(\alpha_2) \sinh(\alpha_I)^2 + (g(\alpha_I) - g(\alpha_2)) \tanh(\alpha_I + \alpha_2) \right) \right) \\
B_I &= \frac{1}{D} \left(\cosh(\alpha_I - \alpha_2) \left(2f(\alpha_2) \sinh(\alpha_I)^2 - 2f(\alpha_I) \sinh(\alpha_2)^2 - (g(\alpha_I) + g(\alpha_2)) \tanh(\alpha_I - \alpha_2) + g(\alpha_2) \sinh(2\alpha_I) - g(\alpha_I) \sinh(2\alpha_2) \right) \right) \\
C_I &= \frac{1}{D} \left(\cosh(\alpha_I + \alpha_2) (g(\alpha_2) - g(\alpha_I) + (f(\alpha_I) - f(\alpha_2)) \tanh(\alpha_I + \alpha_2) + f(\alpha_2) \sinh(2\alpha_I) - f(\alpha_I) \sinh(2\alpha_2)) \right) \\
B &= \frac{2 \cosh(\alpha_I - \alpha_2) ((f(\alpha_I) + f(\alpha_2)) \tanh(\alpha_I - \alpha_2) + g(\alpha_2) - g(\alpha_I))}{D}
\end{aligned} \tag{46}$$

Onde

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= 2K e^{-|\alpha|} \sinh(\alpha) - (\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty) e^{-2|\alpha|} \operatorname{sign}(\alpha) \\
g(\alpha) &= \frac{1}{2} K \cosh(2\alpha) - e^{-|\alpha|} (\sigma_{11}^\infty \cosh(\alpha) + \sigma_{22}^\infty \sinh(|\alpha|)) - p \\
D &= 2 \sinh(\alpha_I - \alpha_2) (\sinh(\alpha_I)^2 + \sinh(\alpha_2)^2)
\end{aligned} \tag{47}$$

A partir da condição (31) pode-se determinar as constantes a_1 e c_1 utilizando as funções $\phi_1(\alpha)$ e $\psi_1(\alpha)$ em $\alpha = \alpha_1$ e $\alpha = \alpha_2$. Usando (21), obtém-se:

$$a_I \sinh(2\alpha) + c_I \cosh(2\alpha) = \tau_{12}^\infty e^{-2|\alpha|} \tag{48}$$

Portanto, da eq.(48), avaliada em α_1 e em α_2 , resultam:

$$\begin{aligned}
a_I &= \frac{\tau_{12}^\infty \left(e^{-2|\alpha_I|} \cosh(2\alpha_2) - e^{-2|\alpha_2|} \cosh(2\alpha_I) \right)}{\sinh(2\alpha_I - 2\alpha_2)} \\
c_I &= \frac{\tau_{12}^\infty \left(e^{-2|\alpha_I|} \sinh(2\alpha_2) + e^{-2|\alpha_2|} \sinh(2\alpha_I) \right)}{\sinh(2\alpha_I - 2\alpha_2)}
\end{aligned} \tag{49}$$

A introdução de (21) em (28) leva a:

$$\Phi_n = n(n^2 - 1) (A_n \cosh(\alpha(n+1)) + C_n \sinh(\alpha(n+1)) + B_n \cosh(\alpha(n-1)) + D_n \sinh(\alpha(n-1))) \tag{50}$$

$$\Phi_n^* = n(n+1) (A_n \sinh(\alpha(n+1)) + C_n \cosh(\alpha(n+1))) + n(n-1) (B_n \sinh(\alpha(n-1)) + D_n \cosh(\alpha(n-1)))$$

Do mesmo modo, utilizando as eqs.(43) e (39), pode-se determinar as constantes A_n, B_n, C_n, D_n para $n \geq 2$ através do sistema de equações formada por (50) avaliadas em $\alpha = \alpha_1$ e $\alpha = \alpha_2$, a saber:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{H_n} \cdot (P_n(\alpha_1, \alpha_2) \Phi_n(\alpha_1) + P_n(\alpha_2, \alpha_1) \Phi_n(\alpha_2) + \\ &\quad Q_n(\alpha_1, \alpha_2) \Phi_n^*(\alpha_1) + Q_n(\alpha_2, \alpha_1) \Phi_n^*(\alpha_2)) \\ B_n &= \frac{1}{H_n} \cdot (P_{-n}(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Phi_n(\alpha_1) + P_{-n}(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Phi_n(\alpha_2) + \\ &\quad Q_{-n}(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Phi_n^*(\alpha_1) + Q_{-n}(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Phi_n^*(\alpha_2)) \\ C_n &= -\frac{1}{H_n} \cdot (U_n(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Phi_n(\alpha_1) + U_n(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Phi_n(\alpha_2) + \\ &\quad (V_n(\alpha_1, \alpha_2) + \cosh(2 \cdot n \cdot \alpha_2 - (n-1) \cdot \alpha_1)) \cdot \Phi_n^*(\alpha_1) + V_n(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Phi_n^*(\alpha_2)) \\ D_n &= \frac{1}{H_n} \cdot (U_{-n}(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Phi_n(\alpha_1) + U_{-n}(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Phi_n(\alpha_2) + \\ &\quad V_{-n}(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Phi_n^*(\alpha_1) + V_{-n}(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Phi_n^*(\alpha_2)) \end{aligned} \tag{51}$$

Onde $\Phi_n(\alpha)$ e $\Phi_n^*(\alpha)$ são dados pelas eqs.(43) e (39), respectivamente, e

$$\begin{aligned} P_n(\xi, \eta) &= \frac{\sinh(\eta n + \xi) \sinh(n(\xi - \eta)) - n \sinh(n\xi + \eta) \sinh(-\xi + \eta)}{n+1} \\ Q_n(\xi, \eta) &= \cosh(\eta n + \xi) \sinh(n(\xi - \eta)) + n \cosh(n\xi + \eta) \sinh(-\xi + \eta) \\ U_n(\xi, \eta) &= \frac{\cosh(\eta n + \xi) \sinh(n(\xi - \eta)) - n \cosh(n\xi + \eta) \sinh(-\xi + \eta)}{n+1} \\ V_n(\xi, \eta) &= \sinh(\eta n + \xi) \sinh(n(\xi - \eta)) + n \sinh(n\xi + \eta) \sinh(-\xi + \eta) \\ H_n &= 2n \left(\sinh(n(\alpha_1 - \alpha_2))^2 - n^2 \sinh(\alpha_1 - \alpha_2)^2 \right) \end{aligned} \tag{52}$$

Aplicando a eq.(21) na (28), tem-se:

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha) &= n(n^2 - 1) (a_n \cosh(\alpha(n+1)) + b_n \cosh(\alpha(n-1)) + c_n \sinh(\alpha(n+1)) \\ &\quad + d_n \sinh(\alpha(n-1))) \end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}\Psi_n^*(\alpha) = & n(n+1) (a_n \cosh(\alpha(n+1)) + c_n \sinh(\alpha(n+1))) + \\ & n(n-1) (b_n \cosh(\alpha(n-1)) + d_n \sinh(\alpha(n-1)))\end{aligned}$$

Utilizando as eqs. (44) e (41), as constantes a_n , b_n , c_n , d_n para $n \geq 2$ podem ser determinadas para o sistema formado pelas equações (53) avaliado em $\alpha = \alpha_1$ e $\alpha = \alpha_2$, levando aos seguintes valores:

$$\begin{aligned}a_n = & \frac{1}{H_n} \cdot (P_n(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Psi_n(\alpha_1) + P_n(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Psi_n(\alpha_2) + \\ & Q_n(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Psi_n^*(\alpha_1) + Q_n(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Psi_n^*(\alpha_2)) \\ b_n = & \frac{1}{H_n} \cdot (P_{-n}(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Psi_n(\alpha_1) + P_{-n}(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Psi_n(\alpha_2) + \\ & Q_{-n}(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Psi_n^*(\alpha_1) + Q_{-n}(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Psi_n^*(\alpha_2)) \\ c_n = & -\frac{1}{H_n} \cdot (U_n(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Psi_n(\alpha_1) + U_n(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Psi_n(\alpha_2) + \\ & (V_n(\alpha_1, \alpha_2) + \cosh(2 \cdot n \cdot \alpha_2 - (n-1) \cdot \alpha_1)) \cdot \Psi_n^*(\alpha_1) + \\ & V_n(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Psi_n^*(\alpha_2)) \\ d_n = & \frac{1}{H_n} \cdot (U_{-n}(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Psi_n(\alpha_1) + U_{-n}(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Psi_n(\alpha_2) + \\ & V_{-n}(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Psi_n^*(\alpha_1) + V_{-n}(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Psi_n^*(\alpha_2))\end{aligned}\tag{54}$$

Onde $\Psi_n(\alpha)$ e $\Psi_n^*(\alpha)$ são dados por (44) e (45).

Finalmente, a constante K é obtida através da condição mostrada na eq. (29) após a introdução das constantes A_n e B_n para $n \geq 1$, determinados em (46) e (51).

3.3 Método numérico

Nesta seção será exposta a metodologia de utilização do programa e do método de elementos finitos, assim como os parâmetros, condições de contorno e métodos numéricos utilizados. Serão descritos os tipos de elementos a serem usados (para o Estado Plano de Tensão), assim como suas características (geometria, disposição dos nós) e a malha utilizada.

3.3.1 Teste do programa: exemplo de Kirsch

Para aprendizado da ferramenta e demonstração de equivalência entre o método de elementos finitos e o analítico proposto por Kirsch (chapa infinita com um furo, sob carregamento uniaxial e pressão interna), foi desenvolvido um problema simplificado, cujos resultados serão apresentados posteriormente.

Tais resultados serão comparados com a solução analítica:

$$\begin{aligned}
 p_i &= 1 \text{ ou } 0 & \sigma_0 &= 1 \text{ ou } 0 & \epsilon &= \frac{a}{b} = \frac{1}{10} \\
 \sigma_\theta(\theta) &= \sigma_0 \cdot \left(1 - 2 \cdot \cos \left(2 \cdot \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right) + \frac{p_i \cdot (1 + \epsilon^2)}{(1 - \epsilon^2)}
 \end{aligned} \tag{55}$$

3.3.2 Casos estudados

Os 11 casos estudados – que se referem às Figuras 8 e 9 de Radi (2011) – são apresentados na Tabela 2 a seguir (onde são mostrados os raios e a distância entre os centros dos furos, em mm, as pressões internas em MPa e a posição do centro dos furos, x_{c1} e x_{c2} , também em mm, baseada na Figura 15). O objetivo de Radi, utilizando a formulação analítica, foi a de variar a aplicação da pressão interna (em um furo ou no outro – casos 8a e 8b), a posição relativa horizontal entre os furos (9aa, 9ab, 9ac, 9ad) e a relação de tamanhos entre eles (9ba, 9bb, 9bc, 9bc, 9bd, 9be). Nestes casos, os furos encontram-se alinhados horizontalmente.

Tabela 2 – Primeiro grupo de simulações, relativo às Figuras 8 e 9 de Radi (2011)

Figura	r_2	r_1	d	p_2	p_1	x_{c2}	x_{c1}
8a	18,5	15,5	44		1	979,5	1023,5
8b	18,5	15,5	44	1		979,5	1023,5
9aa	7,75	15,5	54,25		1	969	1023,25
9ab	7,75	15,5	38,75		1	976,75	1015,5
9ac	7,75	15,5	31		1	980,625	1011,625
9ad	7,75	15,5	26,35		1	982,95	1009,3
9ba	77,5	15,5	108,5		1	976,75	1085,25
9bb	31	15,5	62		1	976,75	1038,75
9bc	15,5	15,5	46,5		1	976,75	1023,25
9bd	7,75	15,5	38,75		1	976,75	1015,5
9be	3,1	15,5	34,1		1	976,75	1010,85

3.3.3 Geometria

Como uma geometria de chapa infinita é impossível de ser realizada em um programa numérico, foi criada uma chapa quadrada com largura de 2000 mm. Tal formato levava, no pior dos casos (furo com raio $r_2 = 77,5 \text{ mm}$), a uma relação diâmetro por lateral da chapa de 7,75%. Na grande maioria das simulações, a relação foi mantida menor que 2% (para furos com 18,5 e 15,5 mm de raio, por exemplo).

É interessante notar que, para os casos de carregamento uniaxial, biaxial e/ou com pressão interna, a estrutura apresenta simetria, quando os furos encontram-se alinhados horizontalmente. Deste modo, apenas meia chapa pode ser simulada, garantindo equivalência dos resultados para uma chapa inteira (Figura 15).

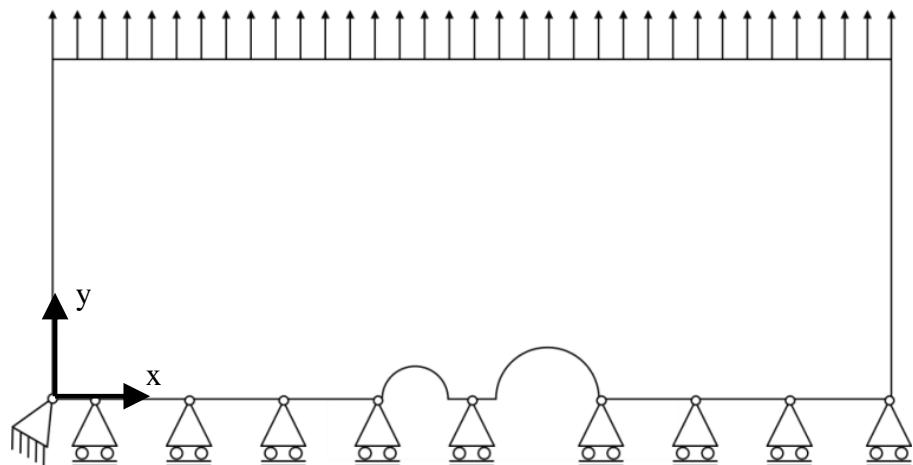


Figura 15 – Exemplo de configuração simétrica simulada em elementos finitos

Nos casos em que os furos possuem posição relativa variada (verticalmente, conforme um ângulo com a horizontal) ou que haja carregamento de cisalhamento nos bordos da chapa, a estrutura não apresenta simetria e por isso a chapa inteira deve ser simulada (Figura 16). Cabe ressaltar que o carregamento biaxial é decomposto em tensões de tração/compressão e cisalhamento, de modo a manter na horizontal o eixo que liga o centro dos furos (antes inclinada de um ângulo ζ). A fórmula utilizada para o cálculo destes carregamentos provém de Radi (2011):

$$\sigma_{11}^{\infty} = \frac{1}{2}[1 + \lambda - (1 - \lambda)\cos 2\zeta] \sigma_1^{\infty}, \quad \sigma_{22}^{\infty} = \frac{1}{2}[1 + \lambda + (1 - \lambda)\cos 2\zeta] \sigma_1^{\infty}, \quad \tau_{12}^{\infty} = \frac{1 - \lambda}{2} \sin 2\zeta \sigma_1^{\infty} \quad (56)$$

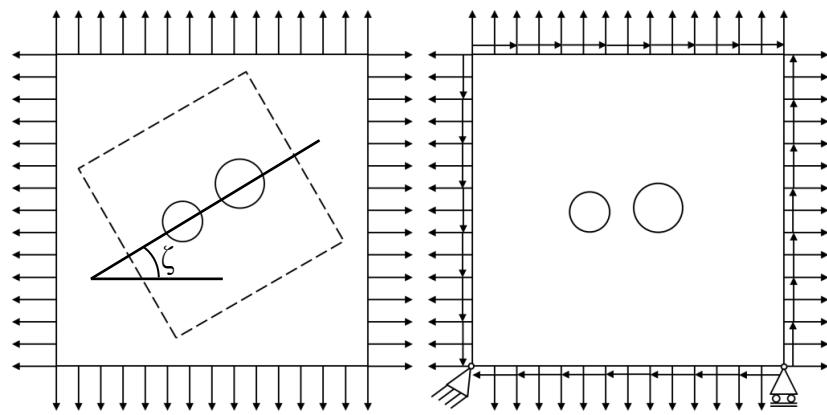


Figura 16 – Exemplo de configuração não simétrica simulada em elementos finitos

3.3.4 Malha

A região a ser simulada foi separada em quatro regiões, no caso de simetria, e cinco, quando esta não ocorria: uma região com malha refinada nas proximidades dos furos (região I), e outras regiões circundantes (II, III e IV) com malha cada vez mais grosseira até atingir os bordos da chapa (Figura 17).

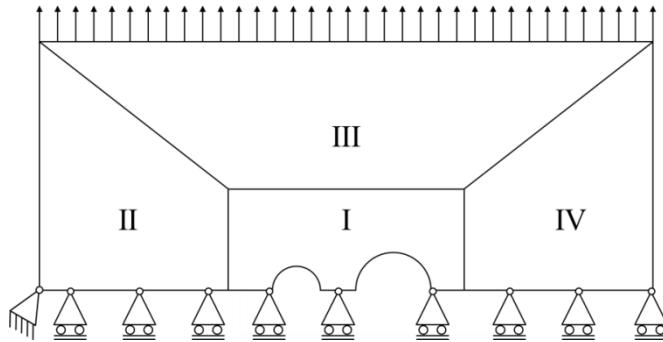


Figura 17 – Malha: delimitação das regiões com refinamento diferenciado

Nos bordos dos furos, foram criados nós com distribuição uniforme de 1 em 1 mm (*MeshSeed*), e uma distribuição variável de 1 a 2 mm até os contornos desta região dos furos. Foi criada uma malha não estruturada que possuía elementos quadriláteros (*Quad4*) de, 2 mm de largura.

Já os contornos das regiões circundantes, uma distribuição variável de nós foi criada, com espaçamento inicial de 2 mm (bordos da região refinada) e final de 10 mm (bordos da chapa). Nestas regiões optou-se pela criação de malha estruturada com elementos com 10 mm de largura.

Deste modo obteve-se a malha mostrada na Figura 18, em uma configuração de exemplo (teste preliminar de Kirsch com pressão interna).

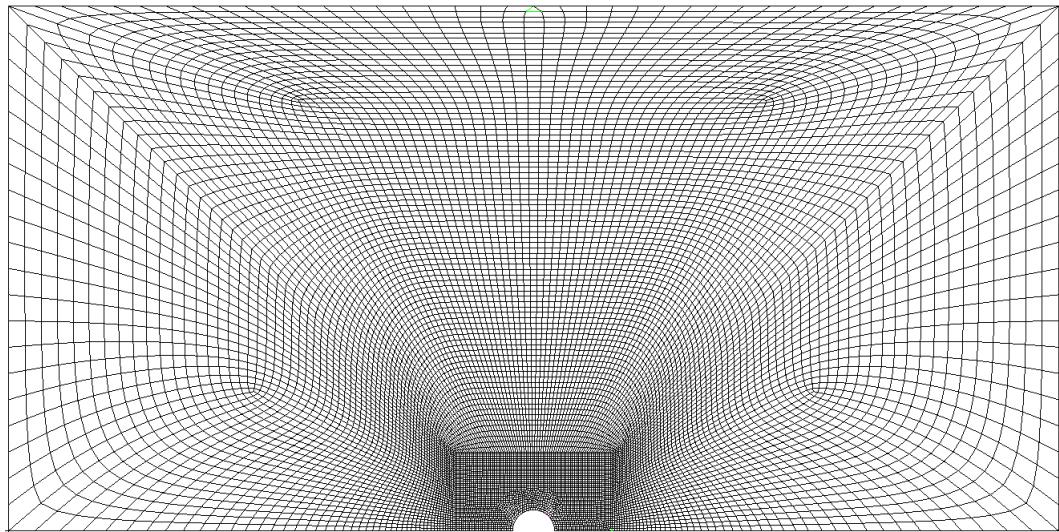


Figura 18 – Malha completa com refinamento diferenciado

3.3.5 Propriedades

O material especificado foi adotado conforme Radi (2011). Desde modo, o material possuía módulo de elasticidade $E = 210 \text{ GPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$.

Por se tratar de um caso de Estado Plano de Tensões (duas dimensões), poderiam ser utilizados elementos de casca, membrana ou sólidos 2D, por exemplo. O ideal seria utilizar o elemento do tipo *2D Solid*, em que era possível escolher o Estado Plano de Tensões, mas, por dificuldade de extrair dados, foram utilizados elementos de membrana, que também se enquadram no caso estudado.

3.3.6 Condições de contorno e carregamentos

Como citado anteriormente, há casos de simetria em que a geometria pode ser dividida ao meio para a análise. Este procedimento requer a criação de condições de contorno compatíveis com o fenômeno físico atrelado. Para o caso estudado, a simetria no plano horizontal é bem representada por um apoio simples no bordo horizontal inferior. Ou seja, os elementos deste contorno podem ter deslocamentos na direção x, mas não em y. Adicionalmente, para limitar o movimento de corpo rígido, um dos nós deve ser engastado para evitar translação em x. Tais considerações podem ser vistas facilmente na Figura 15 já apresentada.

Os carregamentos foram aplicados utilizando da função pressão (*pressure*). Nesta, uma pressão é aplicada na direção normal às faces dos elementos escolhidos. Pode ser utilizada tanto para aplicar as tensões nos bordos da chapa (σ_{11}^{∞} e σ_{22}^{∞}), tanto para aplicar as pressões internas nos furos (p_1 e p_2) (Figura 19).

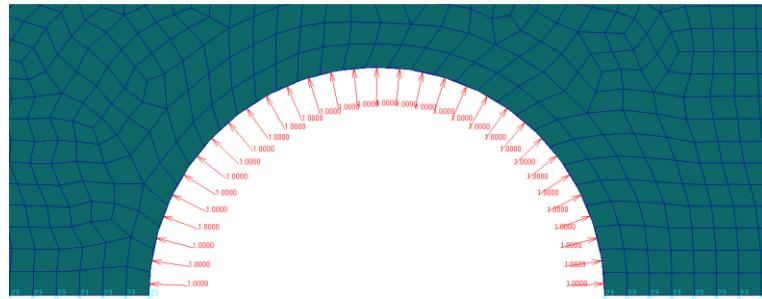


Figura 19 – Aplicação de pressão interna em um furo

3.3.7 Extração e processamento de dados

De modo a obter a tensão circunferencial em cada nó nos bordos dos furos, é necessário conhecer as componentes de tensão σ_x , σ_y e τ_{xy} e as coordenadas da posição (x, y) do nó em questão. Estes dados podem ser extraídos do Patran através da função *Results* → *Report* → *Overwrite File*, em que um arquivo com extensão *txt* é criado. É necessário, para tanto, selecionar os nós de interesse. Em seguida, os dados devem ser processados por meio de Excel, utilizando as seguintes fórmulas:

$$\theta = \arccos\left(\frac{(x - x_c)}{r}\right) \quad (57)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cdot \sin(\theta)^2 + \sigma_y \cdot \cos(\theta)^2 - \tau_{xy} \cdot \sin(2\theta)$$

Estas fórmulas provém da rotação do tensor das tensões para encontrar a tensão em coordenadas cilíndricas (Apêndice 1) e na dedução geométrica para encontrar o ângulo θ a partir dos dados extraídos (Figura 20).

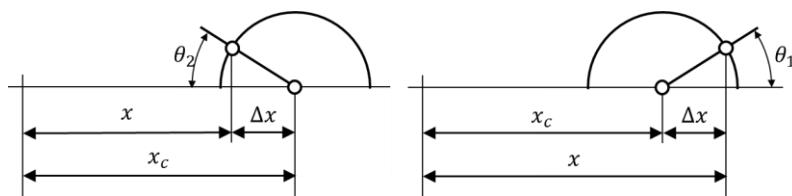


Figura 20 – Esquemas para a determinação do ângulo θ nos furos 1 (à direita) e 2 (à esquerda)

4 RESULTADOS

Objetiva-se obter gráficos da tensão circumferencial nos bordos dos orifícios em função do ângulo destes através dos dois métodos apresentados (analítico e numérico) a fim de proporcionar uma comparação entre ambas as metodologias.

4.1 Método analítico

A tensão radial é obtida através da soma entre a tensão fundamental e a auxiliar. Desta maneira, foram utilizadas as fórmulas explicitadas na Figura 21 para o seu cálculo.

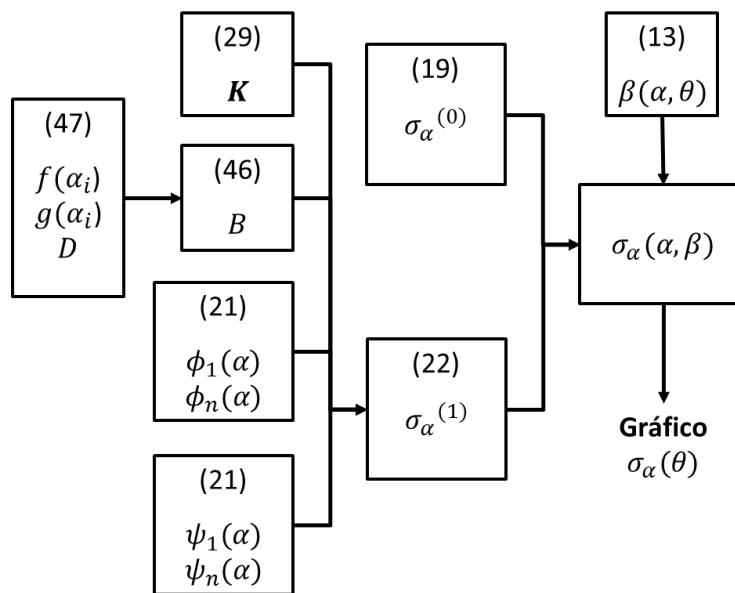


Figura 21 – Fluxograma do cálculo das tensões radiais

A partir das fórmulas correspondentes para cada termo da fórmula final, nota-se uma complexidade para o cálculo de K , β . Tais cálculos serão tratados com mais cuidado nos tópicos seguintes. Além destes, há termos que podem facilmente calculados a partir de uma ou duas fórmulas apenas, conforme deduzido por Radi (2011).

Já os termos ϕ_1 , ϕ_n , ψ_1 e ψ_n possuem complexidade na implementação, devido à grande quantidade de fórmulas e funções atreladas. Estes parâmetros dependentes da coordenada curvilínea α podem ser determinados com o auxílio das fórmulas mostradas nos fluxogramas das Figuras 22 e 23.

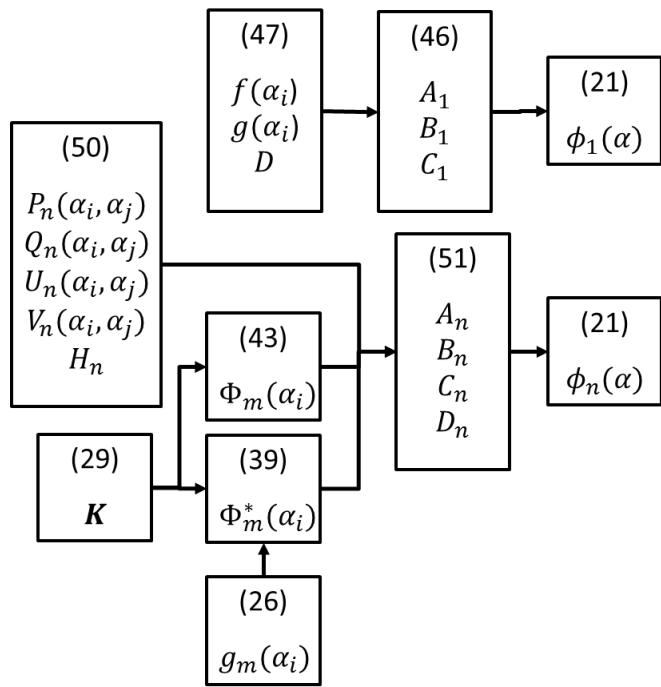


Figura 22 – Fluxograma do cálculo de ϕ_1 e ϕ_n

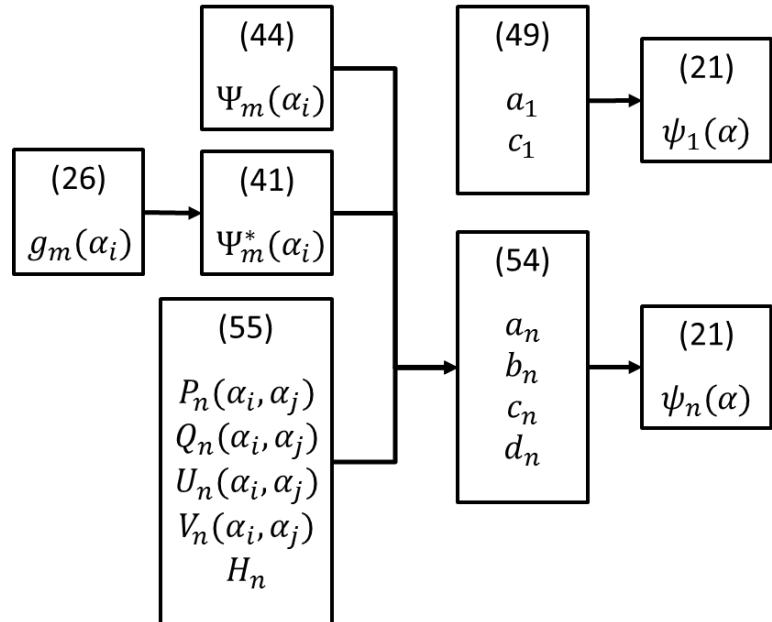


Figura 23 – Fluxograma do cálculo de ψ_1 e ψ_n

Analogamente, o cálculo da tensão cisalhante $\tau_{\beta\alpha}$ é mostrado no fluxograma da Figura 24. Nota-se que vários termos podem ser aproveitados em comparação com o cálculo da tensão radial.

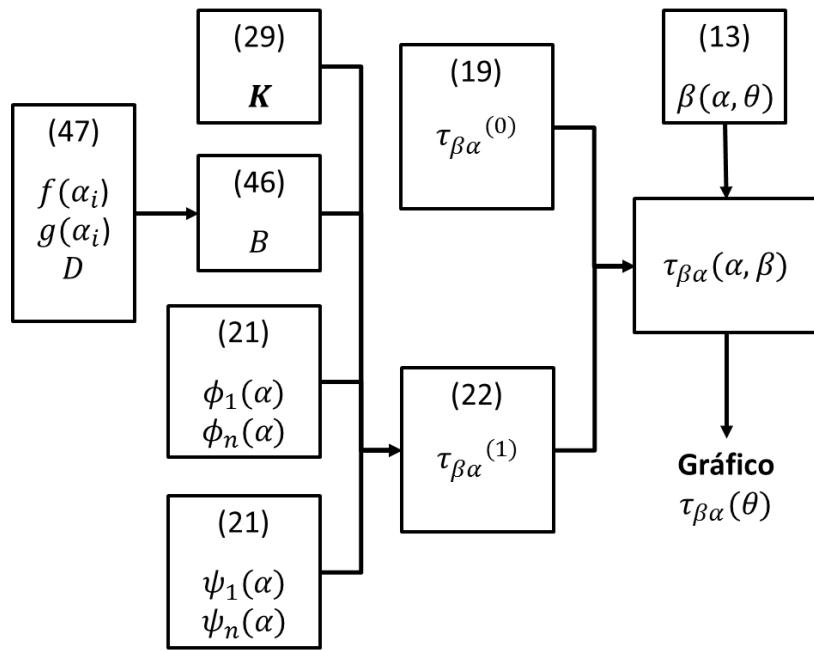


Figura 24 – Fluxograma do cálculo das tensões cisalhantes

E, da mesma maneira, a fórmula para o cálculo da tensão circunferencial σ_β pode ser vista no fluxograma da Figura 25.

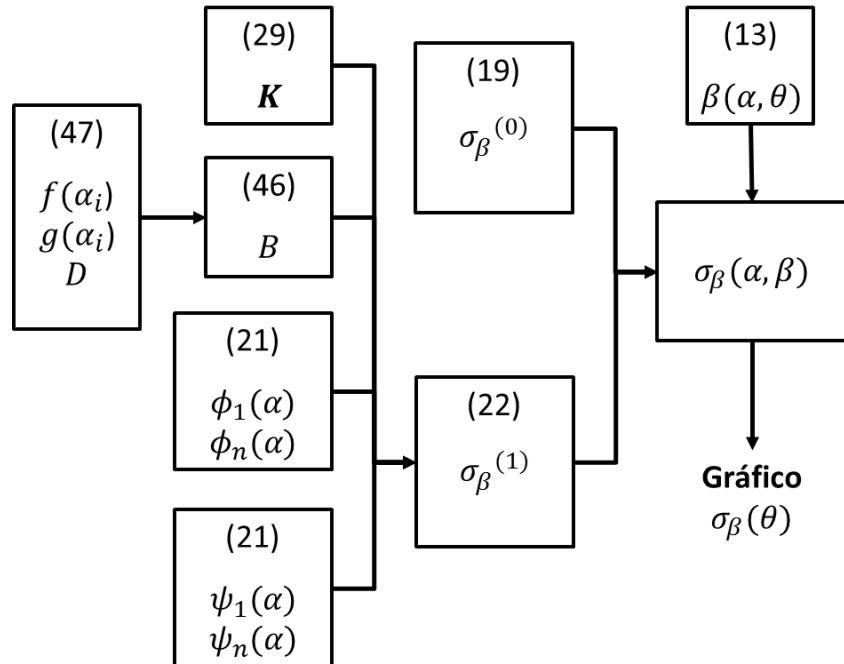


Figura 25 – Fluxograma do cálculo das tensões circunferenciais

Cabe ressaltar que a implementação para o cálculo destas tensões está apresentada no Anexo 3.

4.1.1 Determinação de K

O coeficiente K varia conforme a configuração escolhida e valores de parâmetros geométricos. Conforme o fluxograma da Figura 26 pode-se ver quais fórmulas foram utilizadas para a obtenção deste coeficiente.

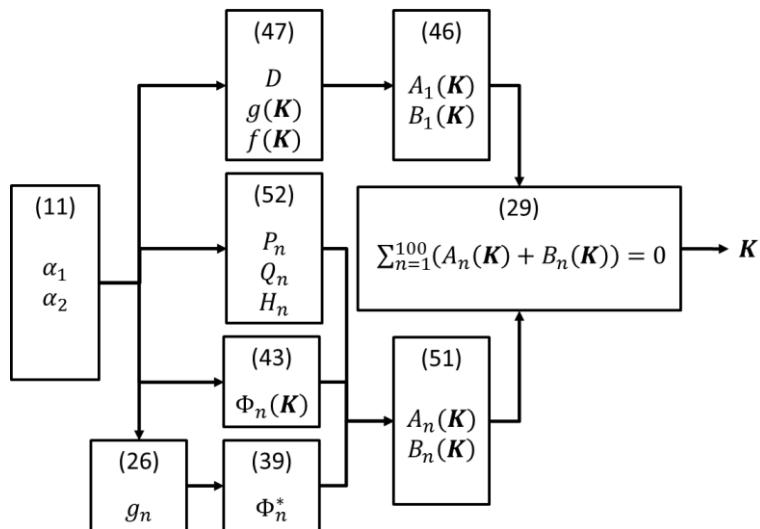


Figura 26 – Fluxograma do cálculo do parâmetro K

Como se pode ver no Anexo 1, um programa foi criado na plataforma Maple para a determinação do coeficiente. Cabe ressaltar que a somatória da eq.(29) teve seu limite superior mudado de infinito para 100, de modo a ser possível o cálculo do somatório no programa. Foi observado empiricamente que, utilizando um valor para n de aproximadamente 10 já era suficiente para a convergência e a estagnação do somatório, conforme observado na Figura 27 a seguir.

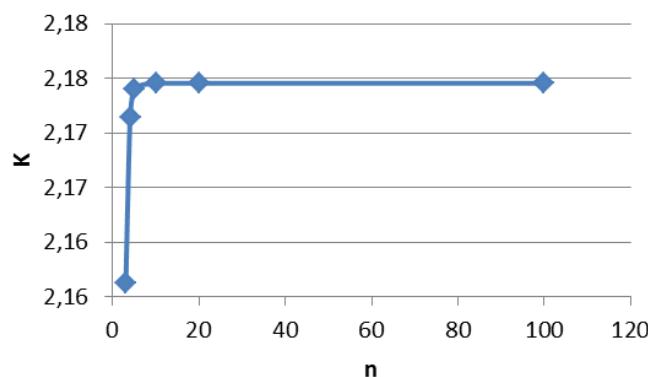


Figura 27 – Gráfico da variação de K com a mudança do limite superior do somatório, para uma configuração de exemplo

Deste modo, considerando parâmetros variados de r_1 , r_2 , d , σ_{11}^∞ , σ_{22}^∞ , τ_{12}^∞ , p_1 e p_2 , podem ser calculados valores de K quando o limite do somatório é limitado a cem.

4.1.2 Determinação de β

Para o cálculo das tensões circunferencial e radial, é imperativa a determinação da coordenada curvilínea β em função do ângulo θ . Deste modo, para o furo 1, utilizando as relações obtidas na eq.(13), pode-se facilmente isolar a variável β e encontrar uma fórmula para esta coordenada (Anexo 2):

$$\beta = \arccos\left(\frac{\cos(\theta) \cosh(\alpha) + 1}{\cos(\theta) + \cosh(\alpha)}\right) \quad (58)$$

Além disso, através de um gráfico ilustrativo (Figura 28), observa-se que o valor de β deve ser negativo para valores de θ menores que 0 (zero) de modo a considerar o lado inferior do furo.

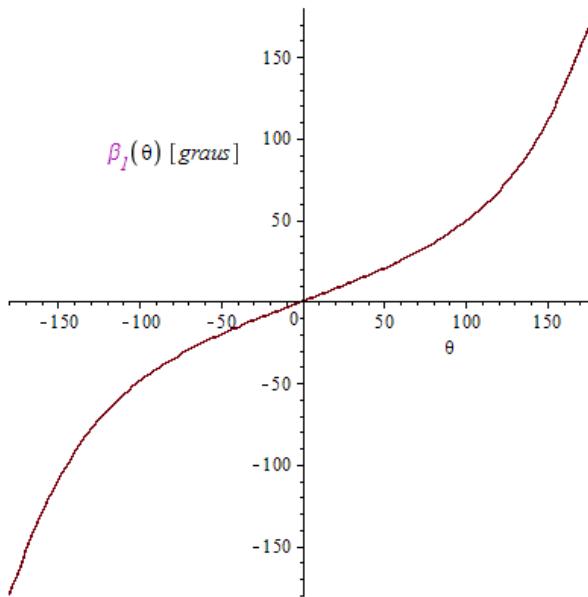


Figura 28 – Gráfico da variação de β em função de θ

Foi notado que esta coordenada assemelha-se a um arco capaz, isto é, o local geométrico em que todos os pontos do círculo passante pelos pontos a e $-a$ possuem mesmo ângulo com relação a estes pontos. Assim, o orifício pode ser descrito pela variação de β , ponto a ponto, como uma família de círculos com raios variados, conforme Figura 29.

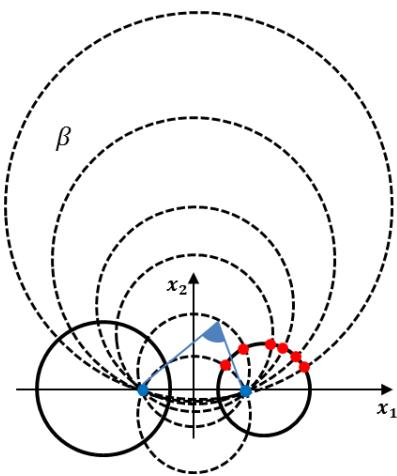


Figura 29 – Visão geométrica da coordenada β

Assim, deduziu-se uma fórmula para um β geométrico, isto é, para o caso de β representar um arco capaz com base nos pontos a e $-a$, como visto nas Figuras 30 e 31 a seguir e nas fórmulas de (59), para o primeiro furo.

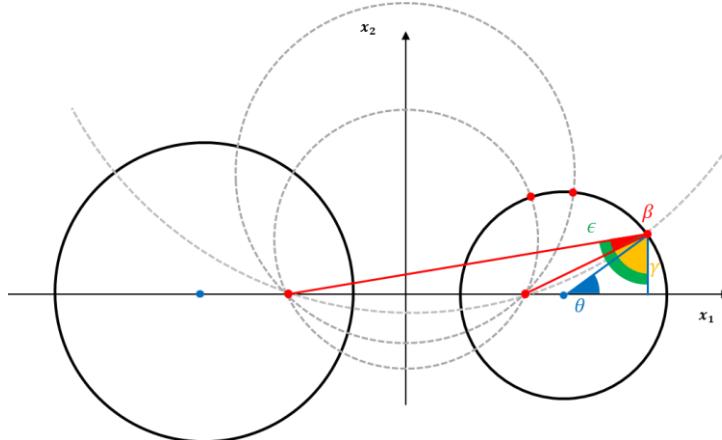


Figura 30 – Coordenada β como arco capaz e outros ângulos relevantes

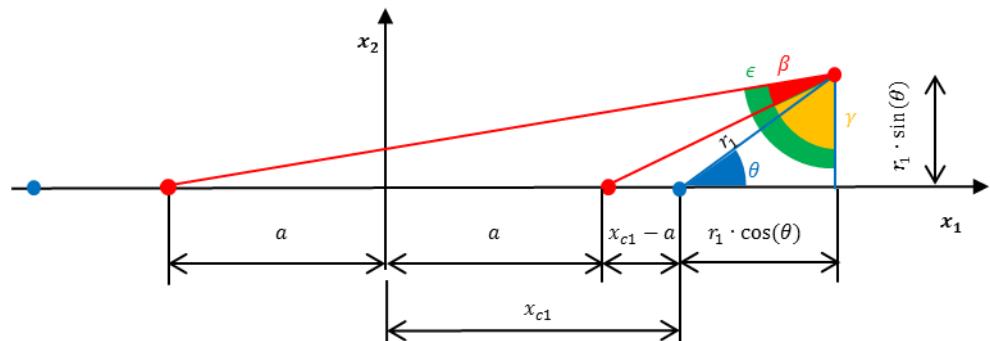


Figura 31 – Coordenada β como arco capaz, ângulos e medidas relevantes

$$\gamma_I := \theta \rightarrow \frac{180}{\pi} \cdot \arctan \left(\frac{a \cdot \coth(\alpha_I) - a + r_I \cdot \cos\left(\frac{\theta \cdot \pi}{180}\right)}{r_I \cdot \sin\left(\frac{\theta \cdot \pi}{180}\right)} \right)$$

$$\epsilon_I := \theta \rightarrow \frac{180}{\pi} \cdot \arctan \left(\frac{a + a \cdot \coth(\alpha_I) + r_I \cdot \cos\left(\frac{\theta \cdot \pi}{180}\right)}{r_I \cdot \sin\left(\frac{\theta \cdot \pi}{180}\right)} \right) \quad (59)$$

$$\beta_{geom} := \theta \rightarrow \epsilon_I(\theta) - \gamma_I(\theta)$$

Para a obtenção desta fórmula, foi utilizada a distância do centro do furo à origem. É possível deduzir que:

$$x_{cl} := a \cdot \coth(\alpha_I) \quad (60)$$

Foi observado que o resultado encontrado através da dedução por arco capaz é bem representativo para a coordenada em questão (Figura 32).

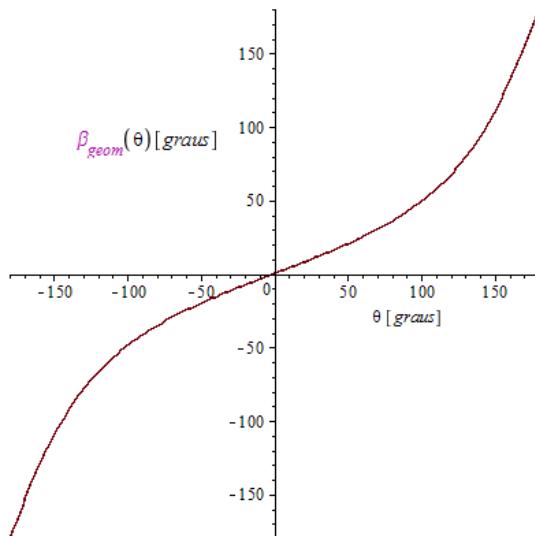


Figura 32 – Gráfico da variação de β (dedução por arco capaz) em função de θ

E, fazendo-se a subtração entre ambas as fórmulas deduzidas, nota-se uma diferença irrelevante entre elas, na ordem de 10^{-8} , conforme mostrado na Figura 33. Neste trabalho, foi utilizada a fórmula baseada na dedução de Radi (2011). A versão geométrica foi utilizada apenas para melhor entendimento da coordenada curvilínea.

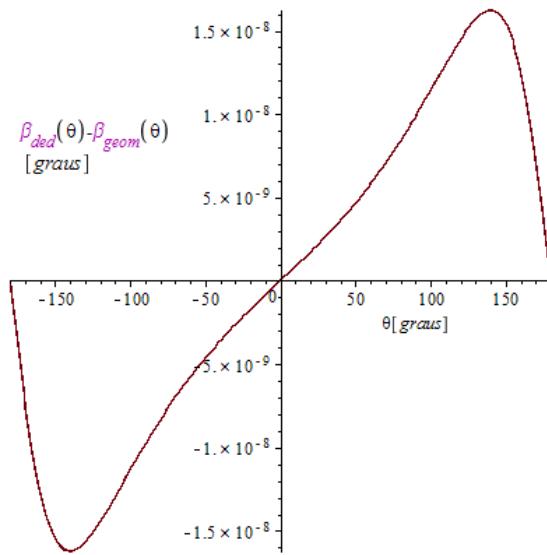


Figura 33 – Gráfico da comparação entre β baseado na dedução de Radi (2011) e β deduzido como arco capaz

4.1.3 Tensão radial $\sigma_\alpha(\theta)$

Os resultados obtidos para ambos os furos, no que concerne à tensão radial, são os mostrados na Figura 34.

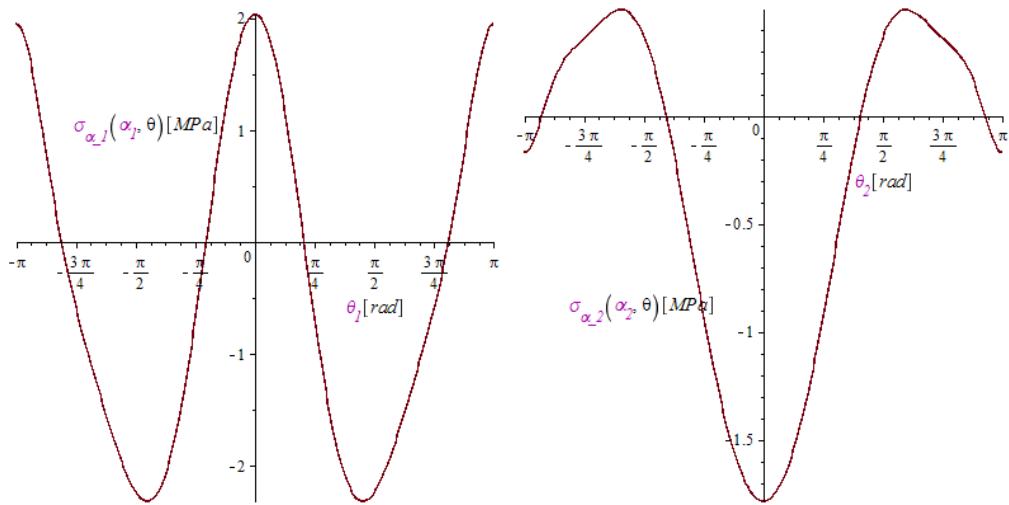


Figura 34 – Gráfico de $\sigma_\alpha(\theta)$ para o primeiro furo (esquerda) e segundo furo (direita)

Porém, nota-se que os resultados são incompatíveis com a condição de contorno dada, em que não há carregamentos radiais nos bordos dos furos.

4.1.4 Tensão circunferencial $\sigma_\beta(\theta)$

A tensão circunferencial também foi calculada e plotada na Figura 35, porém, seus resultados não são confiáveis, conforme já explicado no tópico anterior.

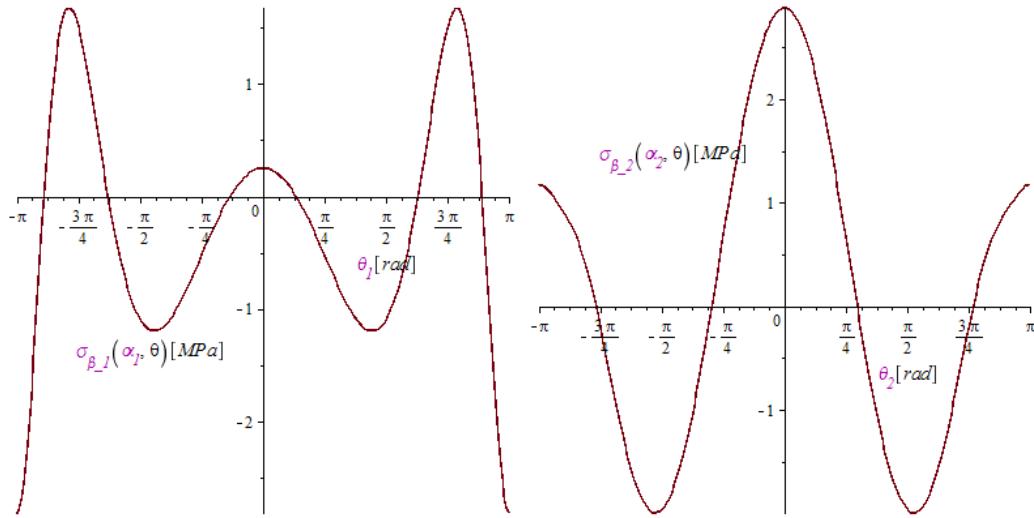


Figura 35 – Gráfico de $\sigma_\beta(\theta)$ para o primeiro furo (esquerda) e segundo furo (direita)

4.1.5 Tensão de cisalhamento $\tau_{\beta\alpha}(\theta)$

Analogamente, os resultados obtidos para a tensão de cisalhamento (conforme a Figura 36) devem ser futuramente revisados, já que o valor esperado para a tensão de cisalhamento nos bordos dos orifícios seria $\tau_{\beta\alpha} = 0$.

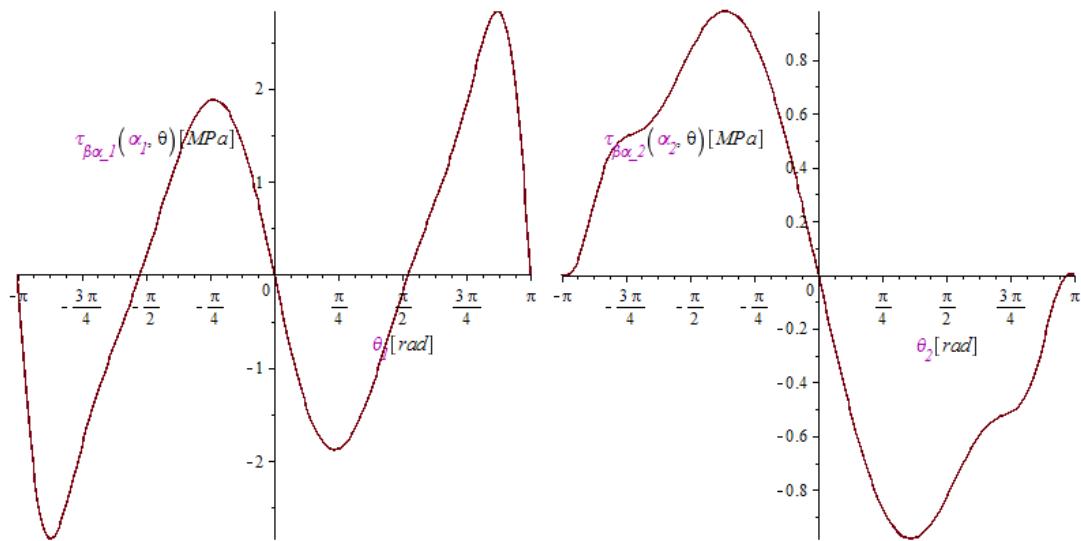


Figura 36 – Gráfico de $\tau_{\beta\alpha}(\theta)$ para o primeiro furo (esquerda) e segundo furo (direita)

4.1.6 Conferência de fórmulas da bibliografia

Devido à obtenção de resultados parciais que não condiziam com o esperado (como tensões radiais nos bordos dos furos em condição de furos sem pressão interna), durante a elaboração deste trabalho, tornou-se imperativo conferir se havia erros de dedução ou digitação nas fórmulas propostas por Radi (2011).

Não foi possível deduzir na totalidade as fórmulas propostas por Radi (2011), no tempo deste trabalho de conclusão de curso. As que foram deduzidas serão citadas adiante.

4.1.7 Fórmula da eq.(22)

Como mostrado anteriormente, as fórmulas para as tensões derivam da eq.(15), em primeira instância. Através de comparação com a fórmula de $\sigma_{\beta}^{(1)}$, notou-se que faltava um parêntesis na fórmula de $\sigma_{\alpha}^{(1)}$ proposta por Radi (2011). Deste modo, a fórmula proposta foi modificada conforme mostrado em vermelho na eq.(61).

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\alpha}^{(1)} = & -\frac{1}{2} K (\cosh(2\alpha) - 2 \cosh(\alpha) \cos(\beta) + \cos(2\beta)) - \\
 & - B \sinh(\alpha) (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) + \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\phi_n (\cosh(\alpha) \cos(n\beta) - n^2 (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) \cdot \right. \\
 & \cos(n\beta) + n \sin(\beta) \sin(n\beta)) + \left(\frac{1}{2} \psi_n \left(n^2 \cos(\beta) \sin(n\beta) - (n^2 - 1) \cdot \right. \right. \\
 & \cosh(\alpha) \sin(n\beta) - n \sin(\beta) \cos(n\beta)) \\
 & \left. \left. - \phi_n \sinh(\alpha) \cos(n\beta) - \psi_n \sinh(\alpha) \sin(n\beta) \right) \right) \tag{61}
 \end{aligned}$$

Este resultado, então, foi deduzido novamente conforme a programação do Anexo 4, com base na dedução das tensões por Jeffery (1921). Devido à extensão das fórmulas e dificuldade algébrica de simplificação destas, optou-se por comparação direta dos resultados deduzidos com os propostos por Radi (2011). Tal comparação pode ser vista no Anexo 5. Em suma, concluiu-se que ambas as fórmulas (de Radi e a novamente deduzida) são praticamente idênticas, já que, para um caso específico, as tensões obtidas diferem na ordem de 10^{-10} , conforme mostrado na Figura 37.

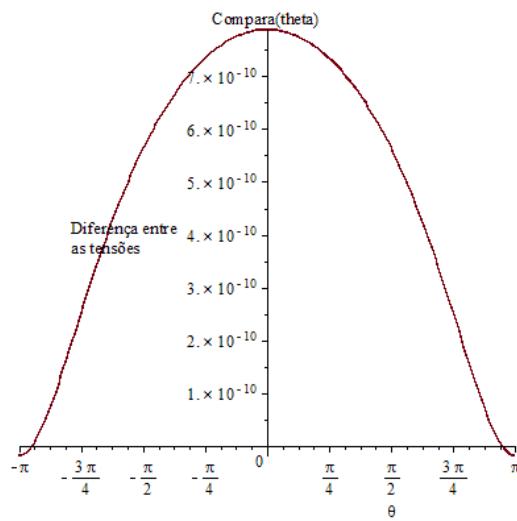


Figura 37 – Gráfico da comparação entre $\sigma_{\alpha_Radi}^{(1)}$ e $\sigma_{\alpha_deduzido}^{(1)}$, para o furo 1

É necessário notar que seria mais preciso simplificar as fórmulas e compará-las subtraindo uma da outra. Além desta análise, foi observado que esta fórmula é conflitante à eq.(27) pela presença do fator 1/2 assinalado na fórmula. Sua discussão será vista mais adiante.

4.1.8 Fórmulas das eqs.(24), (25) e (26)

Com estratégia análoga, foram comparados os resultados obtidos através das tensões provenientes da função de tensão fundamental da eq.(19), considerada correta pela bibliografia, e os obtidos após a expansão em séries de Fourier da eq.(24). Assim, para um carregamento específico, a diferença ficou na ordem de 10^{-10} (Figura 38), mostrando equivalência entre ambas as fórmulas e correta dedução.

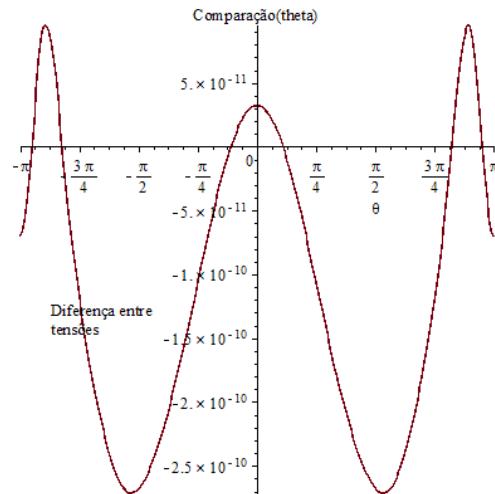


Figura 38 – Gráfico da comparação entre $\sigma_{\alpha_tensão_fund}^{(0)}$ e $\sigma_{\alpha_Fourier}^{(0)}$, para o furo 1

Novamente, o mais indicado seria a dedução completa a partir do auxílio da integral definida de Ling (1948) ao executado no Anexo 6.

4.1.9 Fórmulas da eq.(27)

Com base na dedução do Anexo 7, notou-se uma incompatibilidade entre a fórmula da eq.(22) e a da eq.(27). A eq.(27) difere da eq.(22) por um fator "ERRO" descrito no Anexo, no item (iii):

$$ERRO = \frac{1}{2} \psi_n \left(\sin(n\beta) \cosh(\alpha) n^2 - n^2 \cos(\beta) \sin(n\beta) + n \sin(\beta) \cos(n\beta) - \sin(n\beta) \cosh(\alpha) \right) \quad (62)$$

Acredita-se que o erro esteja na eq.(22), em que um fator $1/2$ foi escrito a mais multiplicando o termo com ψ_n . Suspeita-se, primeiramente, pela falta de paralelismo com a função de σ_β . Além disso, as deduções das fórmulas seguintes foram baseadas na eq.(27) que, tomada como correta, foi aplicada na eq.(29) levando a toda a dedução para as condições de contorno. Ou seja, caso faltasse ser multiplicado o fator $1/2$ na eq.(27), este teria sido notado nas fórmulas subsequentes, o que não foi o caso.

A segunda fórmula da eq.(27) não foi deduzida como a primeira, porém, notou-se a presença de um n multiplicando o termo T_n . Novamente, trabalhando com a lógica e paralelismo entre fórmulas, notou-se que, na primeira fórmula, os termos S_n e s_n eram multiplicados por n devido à presença multiplicativa de $1/2n$ fora do somatório. Já a segunda apresenta a multiplicação do somatório por $1/2$, dispensando a multiplicação por n deste termo. Além disso, o termo t_n não é multiplicado por este fator, reforçando o argumento.

Deste modo, a segunda fórmula da eq.(27) foi tomada como correta após retirar o termo assinalado na fórmula a seguir.

$$\begin{aligned} \tau_{\beta\alpha} = & t_0 + \frac{1}{2} \cdot \psi_{linha1} - (K \cdot \sinh(\alpha) + B \cdot \cosh(\alpha)) \cdot \sin(\beta) + \frac{B}{2} \cdot \sin(2 \cdot \beta) + \\ & \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} ((-\Phi_{En-1} + 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Phi_{En} - \Phi_{En+1} + 2 \cdot n \cdot T_n) \cdot \sin(n \cdot \beta) + (\Psi_{En-1} - 2 \cdot \cosh(\alpha) \\ & \cdot \Psi_{En} + \Psi_{En+1} + 2 \cdot t_n) \cdot \cos(n \cdot \beta)) : \end{aligned} \quad (63)$$

As próximas deduções foram feitas com esta fórmula corrigida, não apresentando problemas em dedução. Ou seja, há coerência nesta correção.

4.1.10 Imposição das condições de contorno

A imposição das condições de contorno, como já dito anteriormente, baseia-se em equações provenientes de Jeffery (1921) e dos valores das tensões em regiões específicas (bordos dos furos). Esta imposição é necessária para o cálculo e determinação das constantes desconhecidas e, por isso, foram deduzidas novamente para conferência.

A primeira fórmula da eq.(31) apresentada por Radi (2011) pôde ser deduzida facilmente, assim como a segunda fórmula da eq.(31), no Anexo 8. Porém, esta foi digitada incorretamente por ele, utilizando a letra grega maiúscula ao invés da minúscula, que poderia levar a uma interpretação errada durante a dedução. Assim, a seguinte fórmula deve ser modificada:

$$\Psi'_1(\alpha) = 2 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot e^{-2 \cdot |\alpha|} \rightarrow \Psi'_1(\alpha) = 2 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot e^{-2 \cdot |\alpha|} \quad (64)$$

Neste mesmo Anexo foram deduzidas as fórmulas da eqs.(32) a (35) com certo trabalho algébrico. Por exemplo, foi necessário utilizar funções como o delta de Kronecker, inúmeras transformações de funções hiperbólicas em exponenciais (e vice-versa), abertura em dois casos (quando da existência de funções com módulos), operações com somatórios (abertura de somatórios, mudanças de variáveis, mudança de intervalos e outras propriedades) e outras manipulações algébricas.

Já a eq.(36) foi mostrada numericamente (além de encontrar que as fórmulas são equivalentes, após certas simplificações): fez-se tanto a subtração entre a fórmula deduzida e a proposta por Radi (almejando resultado nulo) e a divisão entre ambas as fórmulas (almejando resultado unitário).

Como visto no Anexo 9, tanto para valores positivos quanto para valores negativos de α , a subtração das fórmulas resultou zero no intervalo procurado (para valores de α até $\pm 2\pi$), considerando valores de m arbitrados (Figura 39).

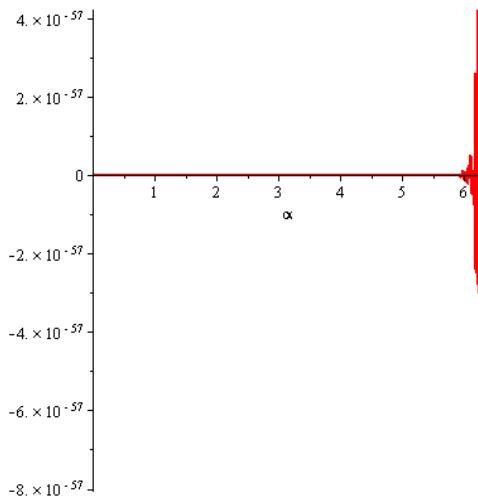


Figura 39 – Gráfico da subtração entre a fórmula deduzida e a da eq.(36) em função de $\alpha > 0$, com $m = 17$

Do mesmo modo, o gráfico da Figura 40 demonstra que a razão entre as fórmulas é igual a 1, provando que ambas são equivalentes.

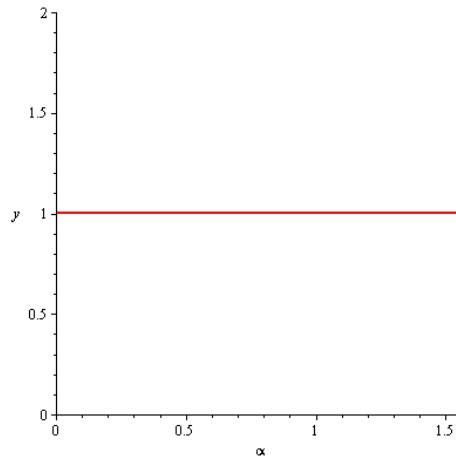


Figura 40 – Gráfico da razão entre a fórmula deduzida e a da eq.(36) em função de $\alpha > 0$, com $m = 17$

Já as fórmulas das eqs.(37), (38) e (39) puderam ser deduzidas literalmente no Anexo 10, utilizando várias manipulações algébricas já citadas. Cabe ressaltar que há um erro de digitação na eq.(38): a ausência do sinal de negativo entre B e $(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty})$ leva a entender erroneamente que se trata de uma multiplicação (em que normalmente o sinal é omitido). Assim, é necessário mudar a seguinte fórmula:

$$\begin{aligned} \Phi_1^*(\alpha) &= 2Ke^{-|\alpha|} \sinh \alpha + B(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty})e^{-2|\alpha|} \operatorname{sign} \alpha \rightarrow \\ &\rightarrow \Phi_1^*(\alpha) = 2Ke^{-|\alpha|} \sinh \alpha + B - (\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty})e^{-2|\alpha|} \operatorname{sign} \alpha \end{aligned} \quad (65)$$

Com relação à dedução das fórmulas das eqs.(40) a (44), no Anexo 11, notou-se que ora Radi (2011) considera o módulo dentro da somatória, ora fora, através do uso da função $sign(\alpha)$, evitando, assim, uma inconsistência entre as fórmulas. Porém, a dedução das duas primeiras fórmulas não pôde ser terminada neste Trabalho de Conclusão de Curso. Para a dedução das seguintes e para a determinação das constantes desconhecidas (próximo tópico), foi considerado que estas fórmulas estavam corretas. É importante ressaltar que as outras três fórmulas deste anexo puderam ser facilmente deduzidas (ou ter suas equivalências demonstradas) e é interessante, para trabalhos futuros, que se terminem as deduções faltantes.

4.1.11 Determinação das constantes desconhecidas

Em sequência às deduções, as constantes podem ser determinadas utilizando certas fórmulas aplicadas às condições de contorno: basicamente nos bordos dos furos ($\alpha = \alpha_1$ e $\alpha = \alpha_2$). Deste modo, vários sistemas lineares foram obtidos para determinar os valores de A_1, B_1, C_1 e B (Anexo 12); a_1 e c_1 (Anexo 12); A_n, B_n, C_n e D_n (Anexo 13), a, b_n, c_n e d_n (Anexo 13).

As fórmulas base para os sistemas lineares – eqs.(45), (48), (50) e (53) – puderam ser obtidas facilmente (apresentadas nos respectivos Anexos) e não apresentaram erros, com exceção da segunda fórmula da eq.(53), em que Radi (2011), após derivar os senos e cossenos hiperbólicos, pela regra da cadeia, errou ao digitar o resultado: no lugar de $\sinh(x)$ deveria constar $\cosh(x)$ e vice-versa. Assim, a seguinte fórmula deve ser corrigida:

$$\begin{aligned} \Psi_n^*(\alpha) &= n \cdot (n+1) \cdot (a_n \cdot \cosh((n+1) \cdot \alpha) + c_n \cdot \sinh((n+1) \cdot \alpha)) + \\ &n \cdot (n-1) \cdot (b_n \cdot \cosh((n-1) \cdot \alpha) + d_n \cdot \sinh((n-1) \cdot \alpha)) \rightarrow \\ \rightarrow \Psi_n^*(\alpha) &= n \cdot (n+1) \cdot (a_n \cdot \sinh((n+1) \cdot \alpha) + c_n \cdot \cosh((n+1) \cdot \alpha)) + \\ &n \cdot (n-1) \cdot (b_n \cdot \sinh((n-1) \cdot \alpha) + d_n \cdot \cosh((n-1) \cdot \alpha)) \end{aligned} \quad (66)$$

Através da dedução dos coeficientes da eq.(49) no Anexo 12, observou-se a falta de um sinal de negativo no valor do coeficiente c_1 .

A conferência dos coeficientes encontrados foi feita com o seguinte procedimento:

- Aplicação das condições de contorno nas fórmulas base
- Obtenção do sistema linear

- Solução do sistema linear pelo método de Cramer
 - Subtração entre o coeficiente obtido e o proposto por Radi (2011)
 - Plotagem com parametrização de todos os fatores inclusos na fórmula

Deste modo, foi possível comparar as fórmulas para situações totalmente genéricas e mostrou-se que elas são consistentes, já que nos intervalos de $\alpha_1, \alpha_2 \in [-2\pi \dots 2\pi]$ a subtração manteve-se resultando zero, como pode ser visto no exemplo do coeficiente A_1 nas Figuras 41 e 42.

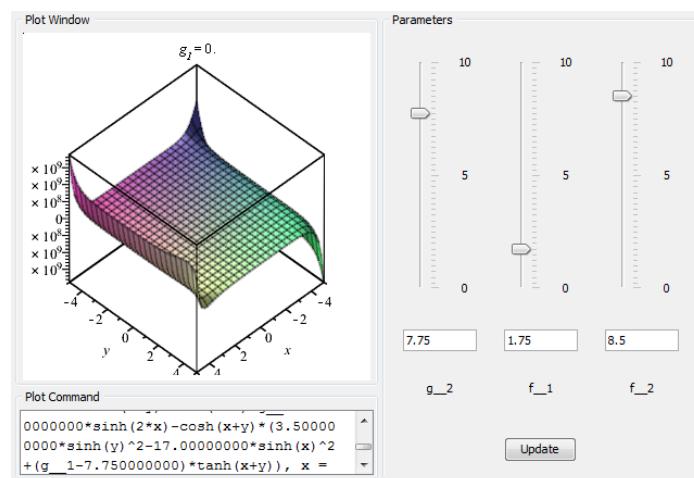


Figura 41 – Gráfico interativo da subtração entre o coeficiente A_1 deduzido e o proposto por Radi (2011), com variação manual dos parâmetros g_2 , f_1 e f_2

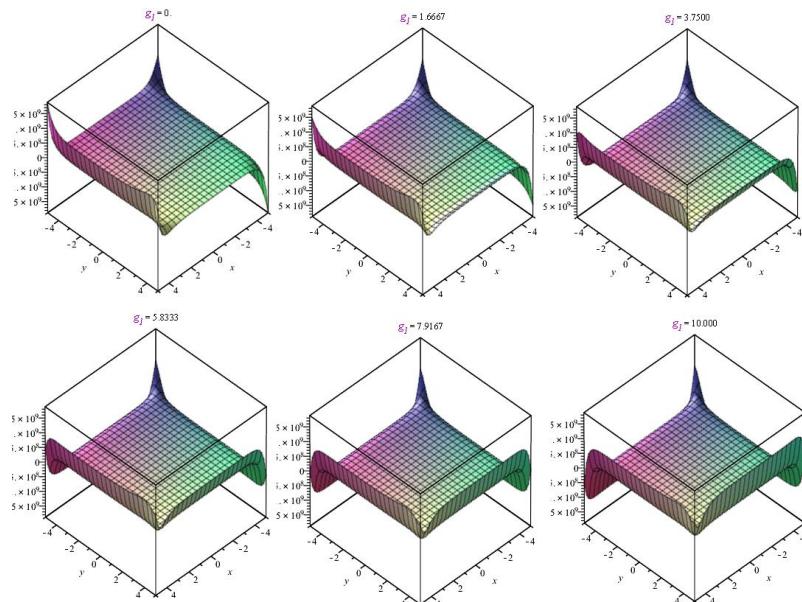


Figura 42 – Gráficos da subtração entre o coeficiente A_1 deduzido e o proposto por Radi (2011), com variação do parâmetro g_1

4.2 Método numérico

Como dito anteriormente, o método dos Elementos Finitos foi confrontado com os resultados analíticos para o caso de um furo em chapa infinita no caso básico de Kirsch, em que há uma solução analítica.

Já para o contexto deste trabalho, em uma primeira abordagem, foram feitas as simulações referentes às Figuras 8 e 9 de Radi (2011), totalizando 11 configurações diferentes, em que se variavam:

- Localização da pressão interna (referente às Figuras 8a e 8b)
- Posição relativa horizontal entre os furos (referente à Figura 9a)
- Tamanho relativo entre os furos (referente à Figura 9b)

Os resultados serão comparados aos resultados analíticos de Radi (2011), a seguir. Em seguida, será feita uma análise variando-se a posição relativa vertical entre os furos.

4.2.1 Verificação do método (problema de Kirsch)

A solução analítica sem tensão no infinito (somente pressão interna) leva a uma distribuição uniforme da tensão circumferencial (constante e igual à pressão interna considerada – neste caso 1 MPa), como pode ser visto no gráfico da Figura 43, à esquerda, proveniente da programação do Anexo 14.

Já a solução com carregamentos uniaxial e pressão interna no furo, há a superposição de ambos os efeitos. Isto é, a tensão constante unitária é somada à tensão concentrada por causa da presença do furo (de valor 3 MPa) nos bordos transversais ao carregamento (resultando em 4 MPa). Já nos bordos longitudinais, a tensão de tração ocasionada pela pressão interna é cancelada com a tensão de compressão proveniente do carregamento uniaxial, conforme pode ser visto na Figura 44, à esquerda.

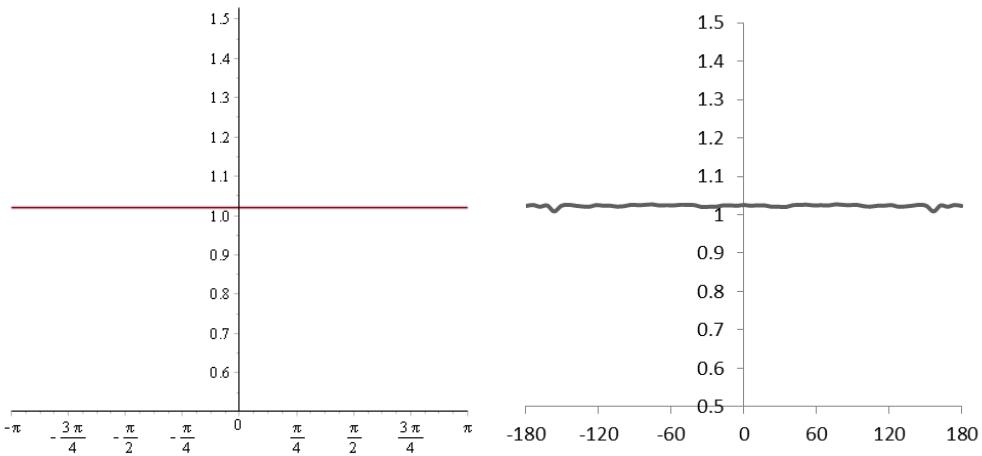


Figura 43 – Tensão circumferencial nos bordos de um furo submetido a pressão interna, exclusivamente, em função de θ : resultados analítico (à esquerda) e numérico (à direita)

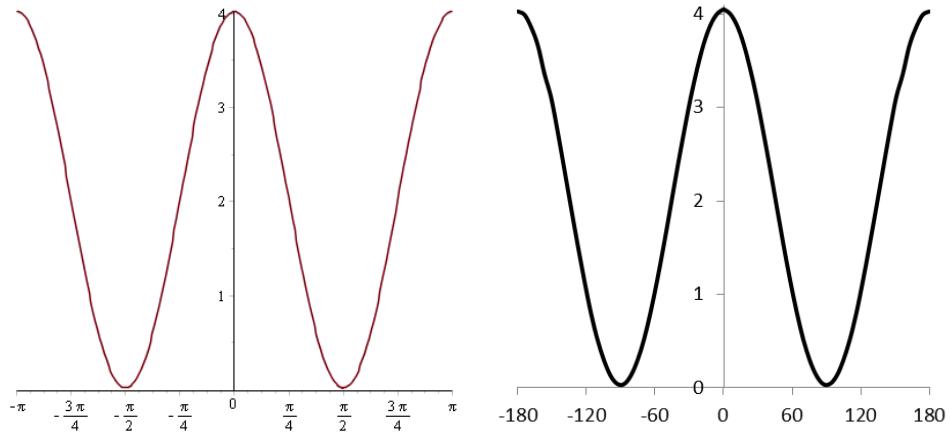


Figura 44 – Tensão circumferencial nos bordos de um furo submetido a pressão interna e carregamento uniaxial, em função de θ : resultados analítico (à esquerda) e numérico (à direita)

Comparando com o resultado das simulações numéricas por elementos finitos (gráficos à direita nas Figuras 43 e 44), nota-se que os resultados são coerentes e, deste modo, o modelo é verificado.

4.2.2 Variação da localização da pressão interna

No primeiro caso (8a), simularam-se dois furos alinhados, sendo apenas o da direita com pressão interna (o de índice 1, com raio menor). Pode-se notar na Figura 45, no gráfico da direita, que os resultados obtidos pelo método dos elementos finitos são compatíveis com o esperado, ao se comparar com a resposta analítica de Radi (2011) – gráfico da esquerda.

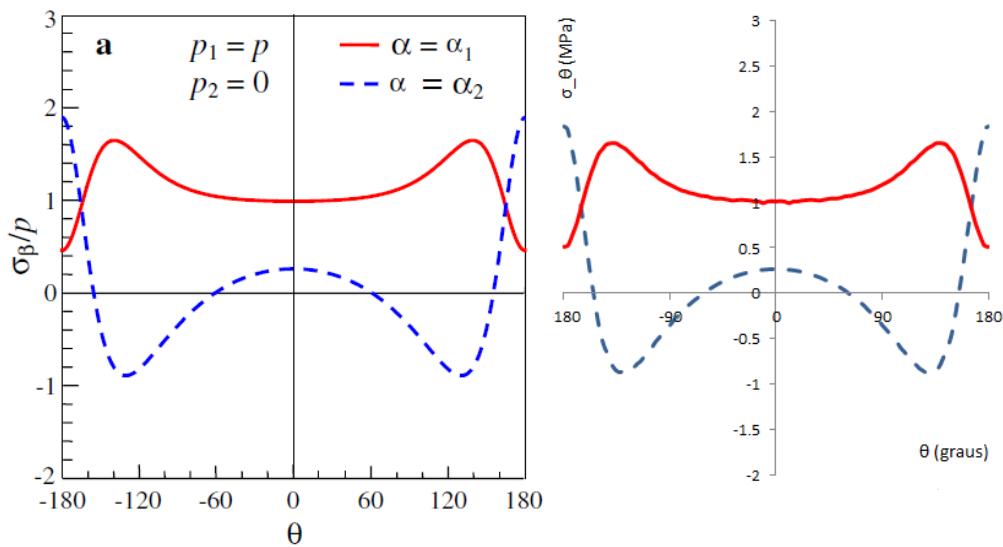


Figura 45 – Tensão circumferencial nos bordos dos furos no caso de pressão interna no furo 1, exclusivamente: à esquerda, resultados analíticos de Radi (2011) – Fig. 8.a adaptada; à direita, resultado obtido numericamente por elementos finitos

No segundo caso (8b), a simulação é similar: dois furos alinhados, mas com pressão interna no furo de índice 2. Nota-se na Figura 46, que os resultados (numéricos e analíticos) são equivalentes.

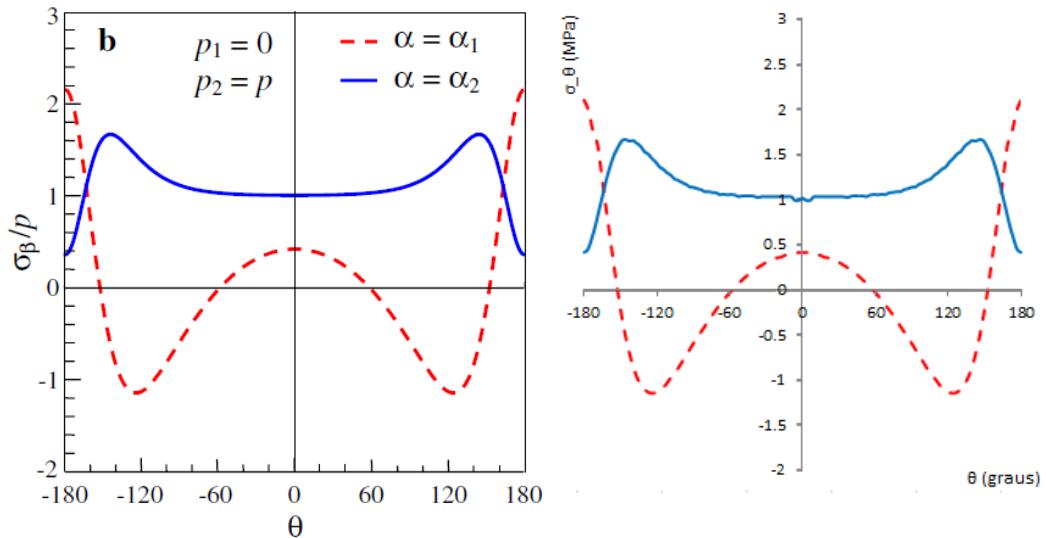


Figura 46 – Tensão circumferencial nos bordos dos furos no caso de pressão interna no furo 2, exclusivamente: à esquerda, resultados analíticos de Radi (2011) – Fig. 8.b adaptada; à direita, resultado obtido numericamente por elementos finitos

4.2.3 Variação da posição relativa horizontal entre os furos

Como feito por Radi (2011), variou-se a posição relativa entre os furos. Inicialmente, apenas na coordenada x_1 (horizontalmente), para o caso de apenas um furo pressurizado.

Os resultados obtidos foram confrontados com os analíticos de Radi (2011) e podem ser vistos na Figura 47. Vê-se que os resultados são compatíveis com o esperado.

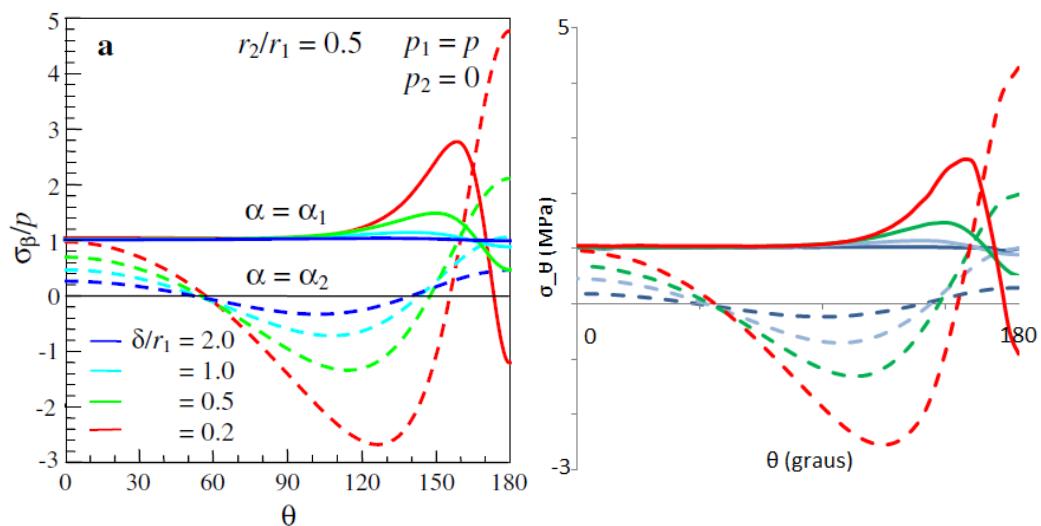


Figura 47 – Tensão circumferencial nos bordos dos furos no caso de pressão interna no furo 1, exclusivamente, em função da distância horizontal relativa entre os furos: à esquerda, resultados analíticos de Radi (2011) – Fig. 9.a adaptada; à direita, resultado obtido numericamente por elementos finitos

4.2.4 Variação do tamanho relativo entre os furos

Para a variação do tamanho dos furos, mantendo-se uma distância constante entre os furos, os resultados também foram consistentes com os obtidos analiticamente, como pode ser visto na Figura 48.

É interessante notar que há uma diferença pequena entre os resultados da tensão circumferencial da bibliografia e os encontrados por elementos finitos na linha tracejada vermelha da Figura 48. Essa diferença pode ter sido causada por imprecisão da malha utilizada e, por isso, seria interessante repetir a simulação mantendo as proporções entre os raios dos furos e outras geometrias.

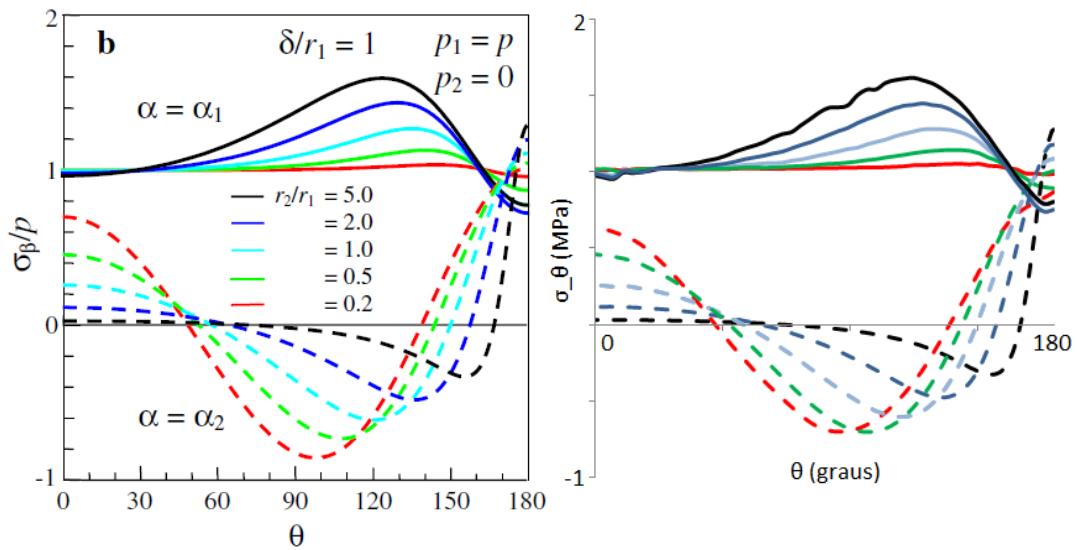


Figura 48 – Tensão circumferencial nos bordos dos furos no caso de pressão interna no furo 1, exclusivamente, em função do tamanho relativo entre os furos: à esquerda, resultados analíticos de Radi (2011) – Fig. 9.b adaptada; à direita, resultado obtido numericamente por elementos finitos

4.2.5 Variação da posição relativa vertical entre os furos

Foram testadas algumas configurações de furos deslocados (com ângulo entre seus centros), conforme a Figura 49.

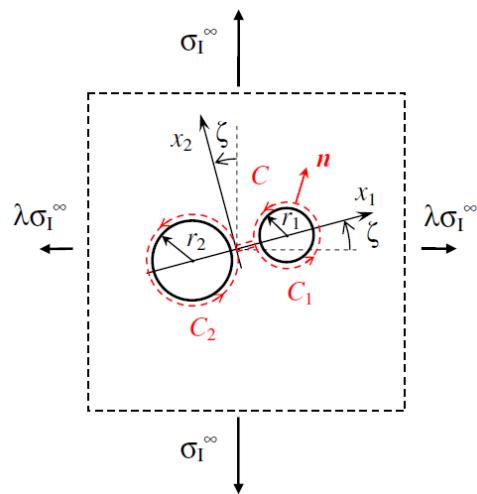


Figura 49 – Chapa infinita com dois furos circulares diferentes sob carregamento biaxial. O ângulo ζ define a orientação relativa das direções principais do campo de tensões remotas com respeito à coordenada x_1 (Radi E., 2011)

Os três casos estudados – que se referem às Figuras 11, 12 e 13 de Radi (2011) – são apresentados na Tabela 3 a seguir (onde as distâncias estão em mm, e as tensões em MPa). Em todos os casos foi mantido o tamanho e localização do furo de índice 1 e variados os parâmetros do segundo furo. Os carregamentos foram calculados com base na eq.(56). Assim:

- $r_1 = 20 \text{ mm}$
- $x_{c1} = 1020 \text{ mm}$
- $y_{c1} = y_{c2} = 1000 \text{ mm}$

Tabela 3 – Segundo grupo de simulações, relativo às Figuras 11,12 e 13 de Radi (2011)

Figura	r_2	x_{c2}	ζ	σ_I^∞	λ	σ_{22}^∞	σ_{11}^∞	τ_{12}^∞
11c	4	976	30°	1	0	0,75	0,25	0,433
12b	10	986	30°	1	0	0,75	0,25	0,433
13c	10	980	60°	1	-1	-0,50	0,25	0,866

Os resultados obtidos pela análise numérica, por elementos finitos, estão ilustrados na Figura 50 a seguir, para estas configurações.

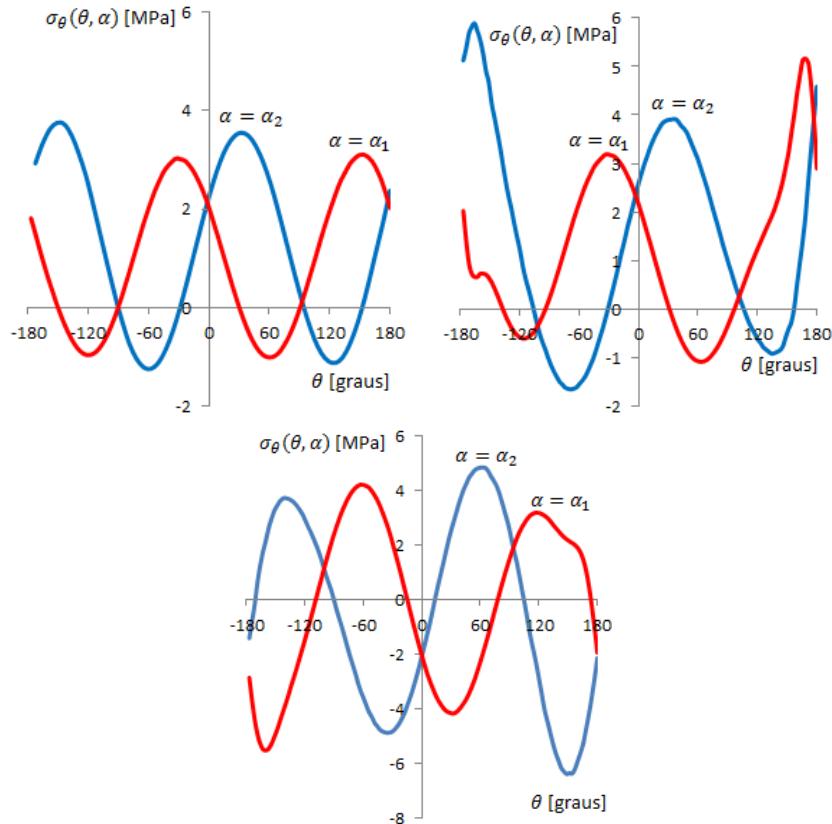


Figura 50 – Tensão circumferencial para as configurações 11c (acima à esquerda), 12b (acima à direita) e 13c (abaixo)

A comparação dos resultados da simulação por elementos finitos com os obtidos analiticamente por Radi (2011) – em suas Figuras 11, 12 e 13 – pode ser vista na Tabela 4 a seguir. Esta tabela mostra a tensão máxima de cada caso (como já visto na Figura 50), em MPa, para os furos 1 e 2 e a posição onde ela ocorre, em graus. Radi (2011) indica diretamente o fator de concentração de tensão (*Stress Concentration Factor – SCF*) e a posição onde este ocorre. Neste caso, ambas as grandezas são equivalentes, devido à magnitude unitária dos carregamentos nos bordos das chapas, e sua razão pode ser calculada para comparação.

Tabela 4 – Comparação dos resultados numéricos por elementos finitos com os analíticos de Radi (2011) para localização e magnitude da maior tensão ocorrida em cada caso

Figura	$\sigma_{\theta num}$	θ_{num}	SCF_{Radi}	θ_{Radi}	$\sigma_{\theta num}/SCF_{Radi}$	$\theta_{num}/\theta_{Radi}$
11c_1	3,1	151	3,1	156	100%	97%
11c_2	3,8	-151	3,9	-168	96%	90%
12b_1	5,2	169	5,5	168	94%	100%
12b_2	5,9	-166	5,9	-172	100%	96%
13c_1	4,2	-63	4,2	-60	101%	105%
13c_2	4,9	63	4,9	90	99%	70%

Como observado na Tabela 4, os resultados são compatíveis, já que os erros ficam, na maioria dos casos, em torno de 5%. A maior discrepância encontrada foi para o caso referente à Figura 13 de Radi (2011) para o segundo furo: 30%.

Cabe ressaltar que os dados analíticos foram retirados de Radi (2011), conforme a Figura 51.

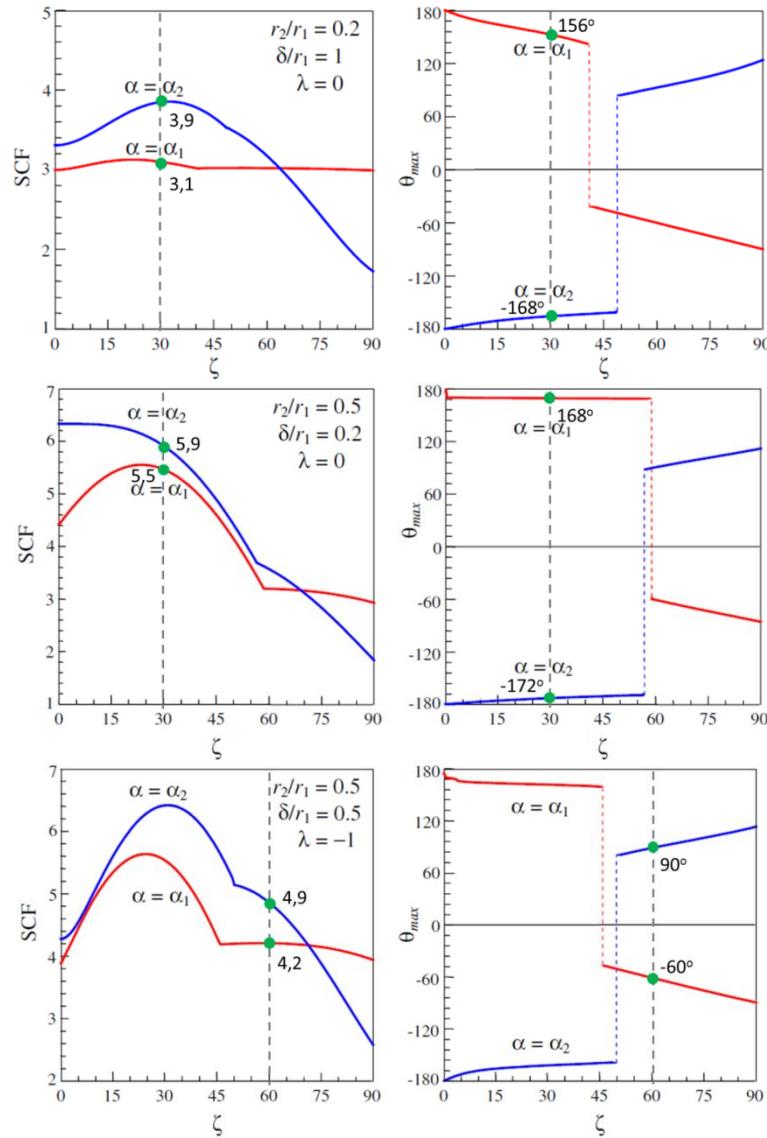


Figura 51 – Variação dos Fatores de Concentração de Tensão (SCF) e a correspondente posição angular onde ocorre a tensão circunferencial máxima, com relação ao ângulo ζ para as condições de: 11c (gráficos superiores), 12b (gráficos ao meio) e 13c (gráficos inferiores).

Adaptado de (Radi E. , 2011)

5 CONCLUSÃO

Após a conclusão deste trabalho, notou-se que ainda é necessária conferência mais aprofundada nas fórmulas de Radi (2011) de modo a encontrar outros possíveis erros de digitação, pois, mesmo após modificar várias de suas fórmulas, continuou-se a encontrar resultados incompatíveis com a realidade: foram encontradas tensões radiais nos bordos dos furos, mesmo na ausência de pressão interna.

Por outro lado, considerando os resultados analíticos retirados de Radi (2011), concluiu-se que estes são condizentes com os encontrados por elementos finitos, que se mostrou bem robusto e com resultados confiáveis para a configuração de chapa com orifícios circulares. Desta modo, entende-se que tanto o método analítico com o uso de coordenadas bipolares quanto o método numérico podem ser aplicados de maneira equivalente.

Apesar de o método analítico aparentar ser mais rápido e direto, por se tratar de uma fórmula para configurações genéricas, teve-se grande dificuldade em sua implementação (devido aos erros encontrados) e considerou-se que o método numérico para estas configurações simples pode ser mais indicado pela rapidez de resultados e facilidade de modelagem.

Para trabalhos futuros, além de uma nova conferência das fórmulas de Radi (2011), na parte analítica, é interessante verificar a seção com variação da posição vertical entre os furos. E na parte numérica, podem-se fazer estudos de malha e utilização do elemento de estado plano de tensão, substituindo o de membrana aqui utilizado (devido à maior facilidade de extração de dados).

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Budiansky, B., & Rice, J. (1973). Conservation laws and energy-release rates. *Journal of Applied Mechanics*, 40, pp. 201-203.
- Carter, J., & Booker, J. (1983). Creep and consolidation around circular openings in infinite media. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 19, No. 8, pp. 663–675.
- Chen, Y.-H., & Lu, T. (2003). Recent developments and applications of invariant integrals. *Applied Mechanics Reviews*, 56(5), pp. 515-552.
- Davanas, K. (1992). Analysis of elastic interactions between holes. *Journal of Materials Science*, 27, pp. 1589-1598.
- Dhir, S. (1968). Stresses around two equal reinforced circular openings in a thin plate. *International Journal of Solids and Structures*, pp. 1093-1106.
- Erickson, P., & Riley, W. (1978). Minimizing Stress Concentrations Around Circular Holes in Uniaxially Loaded Plates. *Experimental Mechanics*, pp. 97-110.
- Green, A. (1940). General bi-harmonic analysis for a plate containing circular holes. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, pp. 121-139.
- Heywood, R. (1952). *Designing by Photoelasticity*. London: Chapman & Hall, Ltd.
- Hoang, S., & Abousleiman, Y. (2008). Extended Green's solution for the stresses in an infinite plate with two equal or unequal circular holes. *Journal of Applied Mechanics*.
- Honein, E., Honein, T., & Hernnnmann, G. (2000). Energetics of two circular inclusions in anti-plane elastostatics. *International Journal of Solids and Structures*, 37, pp. 36673-36679.
- Hu, Y., & Chen, Y. (2009). The M-integral description for a brittle plane strip with two holes before and after coalescence. *Acta Mechanica*, 204, pp. 109-123.

- Hu, Y., & Chen, Y. (2011). The L-integral description for a strip with two holes before, during, and after coalescence. *Acta Mechanica*, 217, pp. 39-49.
- Isida, M., & Igawa, H. (1991). Analysis of a zig-zag array of circular holes in an infinite solid under uniaxial tension. *International Journal of Solids and Structures*, 27(7), pp. 849-864.
- Iwaki, T., & Miyao, K. (1980). Stress concentration in a plate with two unequal circular holes. *International Journal of Engineering Science*, pp. 1077-1090.
- Jeffery, G. (1921). Plane stress and plane strain in bipolar co-ordinates. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, pp. 265-293.
- Ling, C.-B. (1948). On the stresses in a plate containing two circular holes. *Journal of Applied Physics*, 19, pp. 77-82.
- Megson, T. (1999). *Aircraft Structures for engineering students* (Third Edition ed.). Butterworth-Heinemann.
- Meguid, S. (1986). Finite element analysis of defense hole system for the reduction of stress concentration in a uniaxially-loaded plate with two coaxial holes. *Engineering Fracture Mechanics*, 25(4), pp. 403-413.
- Meguid, S., & Shen, C. (1992). On the elastic fields of interacting defense and main hole systems. *International Journal of Mechanical Sciences*, 34(1), pp. 17-29.
- Neuber, H. (1985). *Kerbspannungslehre* (3. Auflage ed.). Springer-Verlag.
- Peterson, R. (1966). *Stress concentration design factors*. Estados Unidos da América: John Wiley & Sons.
- Radi, & Strozzi, A. (2009). Jeffery solution for an elastic disk containing a sliding eccentric circular inclusion assembled by interference fit. *International Journal of Solids and Structures*, pp. 4515-4526.
- Radi, E. (2011). Path-independent integrals around two circular holes in an infinite plate under biaxial loading conditions. *International Journal of Engineering Science*.

Timoshenko, S., & Goodier, J. (1980). *Teoria da Elasticidade* (3^a ed.). Rio de Janeiro, Brasil: Guanabara Dois.

Ting, K., Chen, K., & Yang, W. (1999). Applied alternating method to analyze the stress concentration around interacting multiple circular holes in an infinite domain. *International Journal of Solids and Structures*, 36(4), pp. 533-556.

Tsukrov, I., & Kachanov, M. (1997). Stress concentrations and microfacturing patterns in a brittle elastic solid with interacting pores of diverse shapes. *International Jurnal of Solids and Structures*, 34(22), pp. 2887-2904.

7 ANEXOS

7.1 Anexo 1 – Programação para a determinação de K

[numeração de fórmulas conforme Radi (2011)]

(K é incógnita ainda)

Usando as funções

(61) ok

$$P_n := (n, \xi, \eta) \rightarrow \frac{(\sinh(\xi + n \cdot \eta) \cdot \sinh(n \cdot (\xi - \eta)) + n \cdot \sinh(\eta + n \cdot \xi) \cdot \sinh(\xi - \eta))}{n + 1} :$$

$$Q_n := (n, \xi, \eta) \rightarrow \cosh(\xi + n \cdot \eta) \cdot \sinh(n \cdot (\xi - \eta)) - n \cdot \cosh(\eta + n \cdot \xi) \cdot \sinh(\xi - \eta) :$$

$$U_n := (n, \xi, \eta) \rightarrow \frac{(\cosh(\xi + n \cdot \eta) \cdot \sinh(n \cdot (\xi - \eta)) + n \cdot \cosh(\eta + n \cdot \xi) \cdot \sinh(\xi - \eta))}{n + 1} :$$

$$V_n := (n, \xi, \eta) \rightarrow \sinh(\xi + n \cdot \eta) \cdot \sinh(n \cdot (\xi - \eta)) - n \cdot \sinh(\eta + n \cdot \xi) \cdot \sinh(\xi - \eta) :$$

$$H_n := n \rightarrow 2 \cdot n \cdot (\sinh^2(n \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)) - n^2 \cdot \sinh^2(\alpha_1 - \alpha_2)) :$$

(52) ok

$$\Phi_m := (m, \alpha) \rightarrow e^{-m \cdot |\alpha|} \cdot (2 \cdot K \cdot (\cosh(\alpha) + m \cdot \sinh(|\alpha|)) + (\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty) \cdot m \cdot (m^2 - 1) \cdot \sinh(|\alpha|)) :$$

(30) (ok)

$$g_n := (n, \alpha) \rightarrow e^{-n \cdot |\alpha|} \cdot (\cosh(\alpha) - n \cdot \sinh(|\alpha|)) :$$

(48) ok

$$\Phi_m^* := (m, \alpha) \rightarrow 2 \cdot K \cdot e^{-m \cdot |\alpha|} \cdot \sinh(\alpha) - (\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty) \cdot m \cdot g_n(m, \alpha) \cdot \text{sign}(\alpha) :$$

Podemos calcular a

(60) ok

$$A_n := n \rightarrow \frac{1}{H_n(n)} \left(P_n(n, \alpha_1, \alpha_2) \cdot \Phi_m(n, \alpha_1) + P_n(n, \alpha_2, \alpha_1) \cdot \Phi_m(n, \alpha_2) + Q_n(n, \alpha_1, \alpha_2) \cdot \Phi_m^*(n, \alpha_1) + Q_n(n, \alpha_2, \alpha_1) \cdot \Phi_m^*(n, \alpha_2) \right) :$$

$$B_n := n \rightarrow \frac{1}{H_n(n)} \left(P_n(-n, \alpha_1, \alpha_2) \cdot \Phi_m(n, \alpha_1) + P_n(-n, \alpha_2, \alpha_1) \cdot \Phi_m(n, \alpha_2) + Q_n(-n, \alpha_1, \alpha_2) \cdot \Phi_m^*(n, \alpha_1) + Q_n(-n, \alpha_2, \alpha_1) \cdot \Phi_m^*(n, \alpha_2) \right) :$$

$$C_n := n \rightarrow -\frac{1}{H_n(n)} \left(U_n(n, \alpha_1, \alpha_2) \cdot \Phi_m(n, \alpha_1) + U_n(n, \alpha_2, \alpha_1) \cdot \Phi_m(n, \alpha_2) + (V_n(n, \alpha_1, \alpha_2) + \cosh(2 \cdot n \cdot \alpha_2 - (n - 1) \cdot \alpha_1)) \cdot \Phi_m^*(n, \alpha_1) + V_n(n, \alpha_2, \alpha_1) \cdot \Phi_m^*(n, \alpha_2) \right) :$$

$$D_n := n \rightarrow \frac{1}{H_n(n)} \left(U_n(-n, \alpha_1, \alpha_2) \cdot \Phi_m(n, \alpha_1) + U_n(-n, \alpha_2, \alpha_1) \cdot \Phi_m(n, \alpha_2) + V_n(-n, \alpha_1, \alpha_2) \cdot \Phi_m^*(n, \alpha_1) + V_n(-n, \alpha_2, \alpha_1) \cdot \Phi_m^*(n, \alpha_2) \right) :$$

E, com o auxílio das funções de

(56) ok

$$f := \alpha \rightarrow 2 \cdot K \cdot e^{-|\alpha|} \cdot \sinh(\alpha) - \left(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} \right) \cdot e^{-2 \cdot |\alpha|} \cdot \text{sign}(\alpha) : \\ g := \alpha \rightarrow \frac{K}{2} \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) - e^{-|\alpha|} \cdot \left(\sigma_{11}^{\infty} \cdot \cosh(\alpha) + \sigma_{22}^{\infty} \cdot \sinh(|\alpha|) \right) - p(\alpha) :$$

$$D_0 := 2 \cdot \sinh(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \left(\sinh^2(\alpha_1) + \sinh^2(\alpha_2) \right) :$$

Calculamos

(55) ok

$$A_I := \frac{1}{D_0} \left(\cosh(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \left(2 \cdot f(\alpha_1) \cdot \sinh^2(\alpha_2) - 2 \cdot f(\alpha_2) \cdot \sinh^2(\alpha_1) + (g(\alpha_1) - g(\alpha_2)) \cdot \tanh(\alpha_1 + \alpha_2) \right) \right) :$$

$$B_I := \frac{1}{D_0} \left(\cosh(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \left(2 \cdot f(\alpha_2) \cdot \sinh^2(\alpha_1) - 2 \cdot f(\alpha_1) \cdot \sinh^2(\alpha_2) - (g(\alpha_1) + g(\alpha_2)) \cdot \tanh(\alpha_1 - \alpha_2) + g(\alpha_2) \cdot \sinh(2 \cdot \alpha_1) - g(\alpha_1) \cdot \sinh(2 \cdot \alpha_2) \right) \right) :$$

$$C_I := \frac{1}{D_0} \left(\cosh(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \left(g(\alpha_2) - g(\alpha_1) + (f(\alpha_1) - f(\alpha_2)) \cdot \tanh(\alpha_1 + \alpha_2) + f(\alpha_2) \cdot \sinh(2 \cdot \alpha_1) - f(\alpha_1) \cdot \sinh(2 \cdot \alpha_2) \right) \right) :$$

$$B := \frac{2 \cdot \cosh(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \left((f(\alpha_1) + f(\alpha_2)) \cdot \tanh(\alpha_1 - \alpha_2) + g(\alpha_2) - g(\alpha_1) \right)}{D_0} :$$

Que, na condição de (35), obteremos K:

$$Eq_k := A_I + B_I + \sum_{n=2}^{100} (A_n(n) + B_n(n)) : \text{solve}(Eq_k)$$

1.400045827

atribuir a um nome \rightarrow

K

Para outra configuração, fez-se o seguinte teste, variando o limite superior do somatório:

$$A_I + B_I + \sum_{n=2}^3 (A_n(n) + B_n(n)) : \xrightarrow{\text{resolver para K}} [[K = 2.156230751]]$$

$$A_I + B_I + \sum_{n=2}^4 (A_n(n) + B_n(n)) : \xrightarrow{\text{resolver para K}} [[K = 2.171452795]]$$

$$A_I + B_I + \sum_{n=2}^5 (A_n(n) + B_n(n)) : \xrightarrow{\text{soluções para K}} 2.173991347$$

$$A_I + B_I + \sum_{n=2}^{10} (A_n(n) + B_n(n)) : \xrightarrow{\text{resolver para K}} [[K = 2.174552953]]$$

$$A_I + B_I + \sum_{n=2}^{20} (A_n(n) + B_n(n)) : \xrightarrow{\text{resolver para K}} [[K = 2.174553156]]$$

$$A_I + B_I + \sum_{n=2}^{100} (A_n(n) + B_n(n)) \xrightarrow{\text{resolver para K}} [[K = 2.174553156]]$$

Ou seja, não precisa calcular até o infinito. O valor de K se estabilizou com limite superior de 100.

7.2 Anexo 2 – Programação para o cálculo de $\beta(\theta)$ para o furo 1

$$r_1 := 15.5 :$$

$$r_2 := 18.5 :$$

$$d := 44 :$$

$$a := \frac{1}{2 \cdot d} \cdot \text{sqrt} \left((d^2 - r_1^2 - r_2^2)^2 - 4 \cdot r_1^2 \cdot r_2^2 \right) :$$

$$\alpha_1 := \text{arccosh} \left(\frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2 \cdot d \cdot r_1} \right)$$

$$\frac{\cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta) - 1}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta)} = \cos(\theta)$$

$$\frac{\cosh(\alpha) \cos(\beta) - 1}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta)} = \cos(\theta)$$

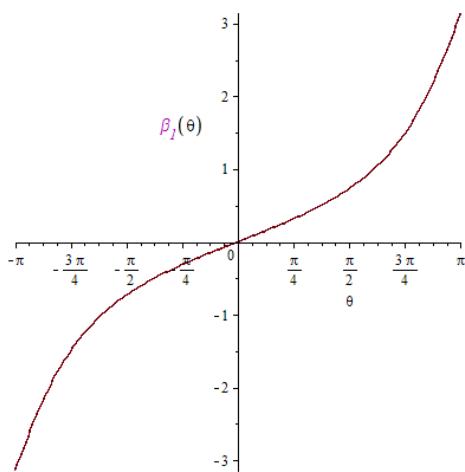
isolar para beta

$$\beta = \text{arccos} \left(\frac{\cos(\theta) \cosh(\alpha) + 1}{\cos(\theta) + \cosh(\alpha)} \right)$$

$$\beta_{\text{direto_cos}} := \theta \rightarrow \text{arccos} \left(\frac{\cos(\theta) \cosh(\alpha) + 1}{\cos(\theta) + \cosh(\alpha)} \right) :$$

$$\beta_1 := \theta \rightarrow \begin{cases} \beta_{\text{direto_cos}}(\theta) & \theta < \pi \text{ and } \theta > 0 \\ -\beta_{\text{direto_cos}}(\theta) & \theta \geq \pi \text{ or } \theta \leq 0 \end{cases} :$$

$$\text{plot}(\beta_1(\theta), \theta = -\pi .. \pi)$$

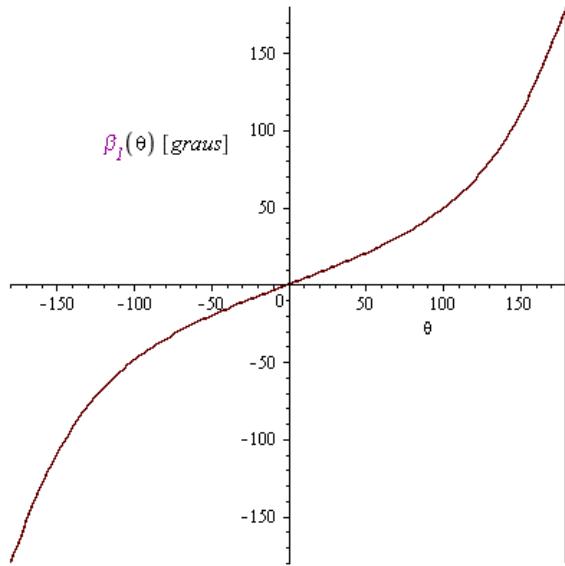


O mesmo, mas em graus:

$$\beta_{\text{ang}} := \theta \rightarrow \frac{180}{\pi} \cdot \text{arccos} \left(\frac{\cos \left(\frac{\theta \cdot \pi}{180} \right) \cosh(\alpha) + 1}{\cos \left(\frac{\theta \cdot \pi}{180} \right) + \cosh(\alpha)} \right) :$$

$$\beta_{angulo1} := \theta \rightarrow \begin{cases} \beta_{ang_I}(\theta) & \theta < 180 \text{ and } \theta > 0 \\ -\beta_{ang_I}(\theta) & \theta \geq 180 \text{ or } \theta \leq 0 \end{cases} ;$$

plot($\beta_{angulo1}(\theta)$, $\theta = -180..180$)



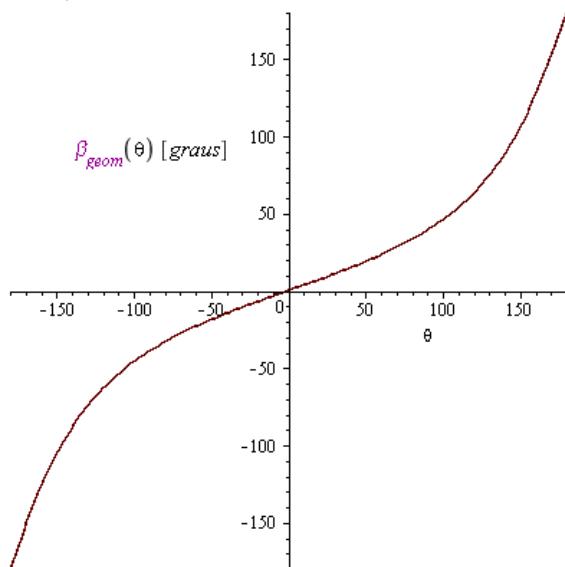
Comparando com a dedução geométrica de arco capaz:

$$\gamma_I = \theta \rightarrow \frac{180}{\pi} \cdot \arctan \left(\frac{\frac{d}{2} - a + r_I \cdot \cos \left(\frac{\theta \cdot \pi}{180} \right)}{r_I \cdot \sin \left(\frac{\theta \cdot \pi}{180} \right)} \right)$$

$$\epsilon_I = \theta \rightarrow \frac{180}{\pi} \cdot \arctan \left(\frac{a + \frac{d}{2} + r_I \cdot \cos \left(\frac{\theta \cdot \pi}{180} \right)}{r_I \cdot \sin \left(\frac{\theta \cdot \pi}{180} \right)} \right)$$

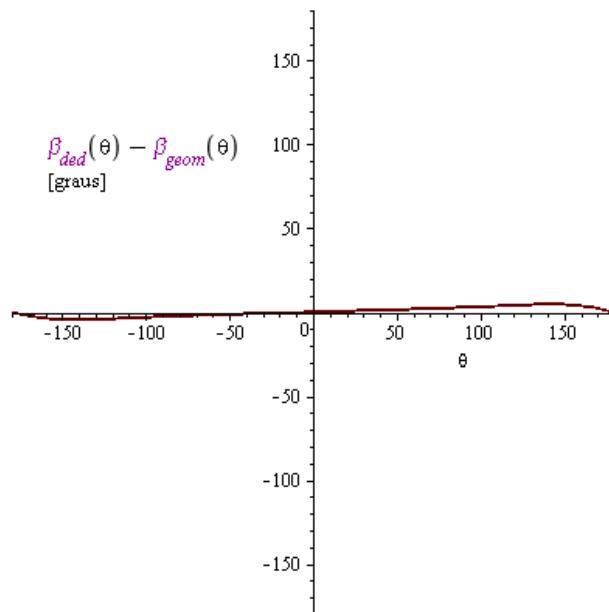
$$\beta_{geom}(\theta) = \epsilon_I(\theta) - \gamma_I(\theta)$$

plot($\beta_{geom}(\theta)$, $\theta = -180..180$)



Compara := $\theta \rightarrow \beta_{angulo\text{ }l}(\theta) - \beta_{geom}(\theta)$:

plot(Compara(θ), $\theta = -180..179$)



Máxima diferença: $\theta=142^\circ \rightarrow \sim 4,55^\circ$ de erro.

7.3 Anexo 3 – Programação para o cálculo das tensões

[numeração de fórmulas conforme Radi (2011)]

Parâmetros dados

$$r_1 := 15.5 :$$

$$r_2 := 18.5 :$$

$$d := 44 :$$

$$\tau_{12}^\infty := 0 :$$

$$\sigma_{11}^\infty := 0 :$$

$$\sigma_{22}^\infty := 1 :$$

$$p_1 := 0 :$$

$$p_2 := 0 :$$

$$a := \frac{1}{2 \cdot d} \cdot \sqrt{\left((d^2 - r_1^2 - r_2^2)^2 - 4 \cdot r_1^2 \cdot r_2^2 \right)} :$$

Parâmetros calculados:

(5)

$$\alpha_1 := \operatorname{arccosh} \left(\frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2 \cdot d \cdot r_1} \right) :$$

$$\alpha_2 := -\operatorname{arccosh} \left(\frac{r_2^2 - r_1^2 + d^2}{2 \cdot d \cdot r_2} \right) :$$

$$p := \alpha \rightarrow \begin{cases} p_1 & \alpha = \alpha_1 \\ p_2 & \alpha = \alpha_2 \end{cases} :$$

Determinação de phi_n e suas derivadas:

Como todos os parâmetros já foram calculados anteriormente (na determinação de K), temos diretamente que:

(17) (ok)

$$\phi_1 := \alpha \rightarrow A_1 \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) + B_1 + C_1 \cdot \sinh(2 \cdot \alpha) :$$

$$\phi_{linha1} := \alpha \rightarrow 2 \cdot A_1 \cdot \sinh(2 \cdot \alpha) + 2 \cdot C_1 \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) :$$

$$\phi_{linha21} := \alpha \rightarrow 4 \cdot A_1 \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) + 4 \cdot C_1 \cdot \sinh(2 \cdot \alpha) :$$

(18) (ok)

$$\phi_n := (n, \alpha) \rightarrow A_n(n) \cdot \cosh((n+1) \cdot \alpha) + B_n(n) \cdot \cosh((n-1) \cdot \alpha) + C_n(n) \cdot \sinh((n+1) \cdot \alpha) + D_n(n) \cdot \sinh((n-1) \cdot \alpha) :$$

$$\phi_{linhan} := (n, \alpha) \rightarrow A_n(n) \cdot (n+1) \cdot \sinh((n+1) \cdot \alpha) + B_n(n) \cdot (n-1) \cdot \sinh((n-1) \cdot \alpha) + C_n(n) \cdot (n+1) \cdot \cosh((n+1) \cdot \alpha) + D_n(n) \cdot (n-1) \cdot \cosh((n-1) \cdot \alpha) :$$

$$\phi_{linha2n} := (n, \alpha) \rightarrow A_n(n) \cdot (n+1)^2 \cdot \cosh((n+1) \cdot \alpha) + B_n(n) \cdot (n-1)^2 \cdot \cosh((n-1) \cdot \alpha) + C_n(n) \cdot (n+1)^2 \cdot \sinh((n+1) \cdot \alpha) + D_n(n) \cdot (n-1)^2 \cdot \sinh((n-1) \cdot \alpha) :$$

Assim, temos o phi, sua primeira derivada e sua segunda derivada:

$$\begin{aligned}\phi_N &:= (n, \alpha) \rightarrow \begin{cases} \phi_j(\alpha) & n < 2 \\ \phi_n(n, \alpha) & n \geq 2 \end{cases} : \\ \phi_{linhaN} &:= (n, \alpha) \rightarrow \begin{cases} \phi_{linha1}(\alpha) & n < 2 \\ \phi_{linhan}(n, \alpha) & n \geq 2 \end{cases} : \\ \phi_{linha2N} &:= (n, \alpha) \rightarrow \begin{cases} \phi_{linha21}(\alpha) & n < 2 \\ \phi_{linha2n}(n, \alpha) & n \geq 2 \end{cases} : \end{aligned}$$

Determinação de psi_n e suas derivadas:

Com o auxílio de

(58) corrigida

$$\begin{aligned}a_1 &:= \frac{\tau_{12}^\infty \cdot \left(e^{-2 \cdot |\alpha_1|} \cdot \cosh(2 \cdot \alpha_2) - e^{-2 \cdot |\alpha_2|} \cdot \cosh(2 \cdot \alpha_1) \right)}{\sinh(2 \cdot (\alpha_1 - \alpha_2))} : \\ c_1 &:= \frac{\tau_{12}^\infty \cdot \left(-e^{-2 \cdot |\alpha_1|} \cdot \sinh(2 \cdot \alpha_2) + e^{-2 \cdot |\alpha_2|} \cdot \sinh(2 \cdot \alpha_1) \right)}{\sinh(2 \cdot (\alpha_1 - \alpha_2))} : \end{aligned}$$

Usando

(53) (ok)

$$\Psi_m := (m, \alpha) \rightarrow 2 \cdot \tau_{12}^\infty \cdot m \cdot (m^2 - 1) \cdot e^{-m \cdot |\alpha|} \cdot \sinh(\alpha) :$$

(50) (ok?)

$$\Psi_m^* := (m, \alpha) \rightarrow 2 \cdot \tau_{12}^\infty \cdot m \cdot g_n(m, \alpha) :$$

Podemos calcular os parâmetros da

(63) ok

$$\begin{aligned}a_n &:= n \rightarrow \frac{1}{H_n(n)} \left(P_n(n, \alpha_1, \alpha_2) \cdot \Psi_m(n, \alpha_1) + P_n(n, \alpha_2, \alpha_1) \cdot \Psi_m(n, \alpha_2) + Q_n(n, \alpha_1, \alpha_2) \right. \\ &\quad \left. \cdot \Psi_m^*(n, \alpha_1) + Q_n(n, \alpha_2, \alpha_1) \cdot \Psi_m^*(n, \alpha_2) \right) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n &:= n \rightarrow \frac{1}{H_n(n)} \left(P_n(-n, \alpha_1, \alpha_2) \cdot \Psi_m(n, \alpha_1) + P_n(-n, \alpha_2, \alpha_1) \cdot \Psi_m(n, \alpha_2) + Q_n(-n, \alpha_1, \alpha_2) \right. \\ &\quad \left. \cdot \Psi_m^*(n, \alpha_1) + Q_n(-n, \alpha_2, \alpha_1) \cdot \Psi_m^*(n, \alpha_2) \right) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_n &:= n \rightarrow -\frac{1}{H_n(n)} \left(U_n(n, \alpha_1, \alpha_2) \cdot \Psi_m(n, \alpha_1) + U_n(n, \alpha_2, \alpha_1) \cdot \Psi_m(n, \alpha_2) + \left(V_n(n, \alpha_1, \alpha_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cosh(2 \cdot n \cdot \alpha_2 - (n-1) \cdot \alpha_1) \right) \cdot \Psi_m^*(n, \alpha_1) + V_n(n, \alpha_2, \alpha_1) \cdot \Psi_m^*(n, \alpha_2) \right) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_n &:= n \rightarrow \frac{1}{H_n(n)} \left(U_n(-n, \alpha_1, \alpha_2) \cdot \Psi_m(n, \alpha_1) + U_n(-n, \alpha_2, \alpha_1) \cdot \Psi_m(n, \alpha_2) + V_n(-n, \alpha_1, \alpha_2) \right. \\ &\quad \left. \cdot \Psi_m^*(n, \alpha_1) + V_n(-n, \alpha_2, \alpha_1) \cdot \Psi_m^*(n, \alpha_2) \right) : \end{aligned}$$

Assim, temos:

(17) (ok)

$$\psi_1 := \alpha \rightarrow a_1 \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) + c_1 \cdot \sinh(2 \cdot \alpha) :$$

$$\psi_{linha1} := \alpha \rightarrow 2 \cdot \textcolor{violet}{a}_1 \cdot \sinh(2 \cdot \alpha) + 2 \cdot \textcolor{violet}{c}_1 \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) :$$

$$\psi_{linha21} := \alpha \rightarrow 4 \cdot \textcolor{violet}{a}_1 \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) + 4 \cdot \textcolor{violet}{c}_1 \cdot \sinh(2 \cdot \alpha) :$$

(19) (ok)

$$\begin{aligned} \psi_n := (n, \alpha) \rightarrow & \textcolor{violet}{a}_n(n) \cdot \cosh((n+1) \cdot \alpha) + \textcolor{violet}{b}_n(n) \cdot \cosh((n-1) \cdot \alpha) + \textcolor{violet}{c}_n(n) \cdot \sinh((n+1) \cdot \alpha) \\ & + \textcolor{violet}{d}_n(n) \cdot \sinh((n-1) \cdot \alpha) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{linhan} := (n, \alpha) \rightarrow & \textcolor{violet}{a}_n(n) \cdot (n+1) \cdot \sinh((n+1) \alpha) + \textcolor{violet}{b}_n(n) \cdot (n-1) \cdot \sinh((n-1) \alpha) \\ & + \textcolor{violet}{c}_n(n) \cdot (n+1) \cdot \cosh((n+1) \alpha) + \textcolor{violet}{d}_n(n) \cdot (n-1) \cdot \cosh((n-1) \alpha) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{linha2n} := (n, \alpha) \rightarrow & \textcolor{violet}{a}_n(n) \cdot (n+1)^2 \cdot \cosh((n+1) \alpha) + \textcolor{violet}{b}_n(n) \cdot (n-1)^2 \cdot \cosh((n-1) \alpha) \\ & + \textcolor{violet}{c}_n(n) \cdot (n+1)^2 \cdot \sinh((n+1) \alpha) + \textcolor{violet}{d}_n(n) \cdot (n-1)^2 \cdot \sinh((n-1) \alpha) : \end{aligned}$$

Assim, temos o psi, sua primeira derivada e sua segunda derivada:

$$\psi_N := (n, \alpha) \rightarrow \begin{cases} \psi_1(\alpha) & n < 2 \\ \psi_n(n, \alpha) & n \geq 2 \end{cases} :$$

$$\psi_{linhaN} := (n, \alpha) \rightarrow \begin{cases} \psi_{linha1}(\alpha) & n < 2 \\ \psi_{linhan}(n, \alpha) & n \geq 2 \end{cases} :$$

$$\psi_{linha2N} := (n, \alpha) \rightarrow \begin{cases} \psi_{linha21}(\alpha) & n < 2 \\ \psi_{linha2n}(n, \alpha) & n \geq 2 \end{cases} :$$

Sigma_alpha

A tensão é calculada a partira das tensões fundamental e auxiliar.

Tensão fundamental:

(15)

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^{(zero)} := (\alpha, \theta) \rightarrow & \frac{1}{(\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta)))^2} \left(\sigma_{11}^{\infty} \cdot (1 - \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta(\alpha, \theta)))^2 \right. \\ & + \sigma_{22}^{\infty} \cdot \sinh^2(\alpha) \cdot \sin^2(\beta(\alpha, \theta)) - 2 \cdot \sigma_{12}^{\infty} \cdot (1 - \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta(\alpha, \theta))) \cdot \sinh(\alpha) \\ & \left. \cdot \sin(\beta(\alpha, \theta)) \right) : \end{aligned}$$

Tensão auxiliar:

(20) corrigida 2x?

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^{(um)} := (\alpha, \theta) \rightarrow & -\frac{K}{2} \cdot (\cosh(2 \cdot \alpha) - 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta(\alpha, \theta)) + \cos(2 \cdot \beta(\alpha, \theta))) - B \\ & \cdot \sinh(\alpha) \cdot (\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta))) + \sum_{n=1}^{100} \left(\phi_N(n, \alpha) \cdot (\cosh(\alpha) \cdot \cos(n \cdot \beta(\alpha, \theta)) - n^2 \right. \\ & \cdot (\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta))) \cdot \cos(n \cdot \beta(\alpha, \theta)) + n \cdot \sin(\beta(\alpha, \theta)) \cdot \sin(n \cdot \beta(\alpha, \theta))) + \psi_N(n, \alpha) \cdot (n^2 \cdot \cos(\beta(\alpha, \theta)) \cdot \sin(n \cdot \beta(\alpha, \theta)) - (n^2 - 1) \cdot \cosh(\alpha) \cdot \sin(n \cdot \beta(\alpha, \theta)) - n \cdot \sin(\beta(\alpha, \theta)) \cdot \cos(n \cdot \beta(\alpha, \theta))) - \phi_{linhaN}(n, \alpha) \cdot \sinh(\alpha) \cdot \cos(n \cdot \beta(\alpha, \theta)) - \psi_{linhaN}(n, \alpha) \cdot \sinh(\alpha) \\ & \left. \cdot \sin(n \cdot \beta(\alpha, \theta)) \right) : \end{aligned}$$

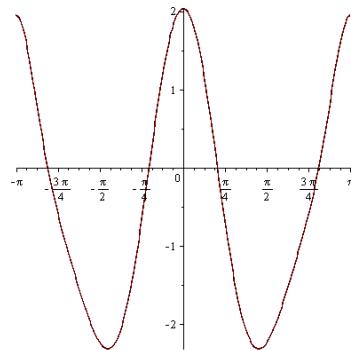
Portanto:

$$\sigma_{\alpha} := (\alpha, \theta) \rightarrow \sigma_{\alpha}^{(zero)}(\alpha, \theta) + \sigma_{\alpha}^{(um)}(\alpha, \theta) :$$

Furo 1:

$$\sigma_{\alpha}^{auxiliar1} := ang \rightarrow \sigma_{\alpha}(\alpha_1, ang) :$$

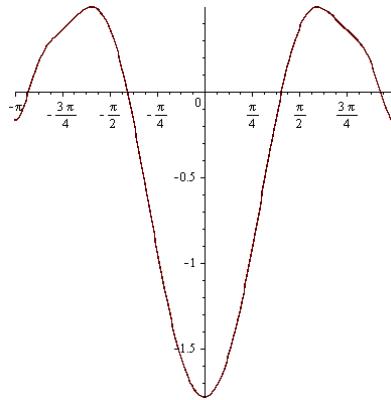
$$plot\left(\sigma_{\alpha}^{auxiliar1}, -\pi .. \pi\right)$$



Furo 2:

$$\sigma_{\alpha}^{auxiliar2} := ang \rightarrow \sigma_{\alpha}(\alpha_2, ang) :$$

$$plot\left(\sigma_{\alpha}^{auxiliar2}, -\pi .. \pi\right)$$



Tau_beta.alpha

A tensão é calculada a partira das tensões fundamental e auxiliar.

Tensão fundamental:

(15)

$$\begin{aligned} \tau_{\beta\alpha}^{(zero)} := (\alpha, \theta) \rightarrow & \frac{1}{(\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta)))^2} \left(\left(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} \right) \cdot (1 - \cosh(\alpha)) \right. \\ & \cdot \cos(\beta(\alpha, \theta)) \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sin(\beta(\alpha, \theta)) + \tau_{12}^{\infty} \cdot \left(\sinh^2(\alpha) \cdot \sin^2(\beta(\alpha, \theta)) - (1 \right. \\ & \left. \left. - \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta(\alpha, \theta)))^2 \right) \right) : \end{aligned}$$

Tensão auxiliar:

(20)

$$\begin{aligned}
\tau_{\beta\alpha}^{(um)} &:= (\alpha, \theta) \rightarrow - (K \cdot \sinh(\alpha) + B \cdot \cosh(\alpha)) \cdot \sin(\beta(\alpha, \theta)) + \frac{B}{2} \cdot \sin(2 \cdot \beta(\alpha, \theta)) \\
&+ (\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta))) \cdot \sum_{n=1}^{100} n \cdot (\phi_{linhaN}(n, \alpha) \cdot \sin(n \cdot \beta(\alpha, \theta)) - \psi_{linhaN}(n, \alpha) \\
&\cdot \cos(n \cdot \beta(\alpha, \theta))) :
\end{aligned}$$

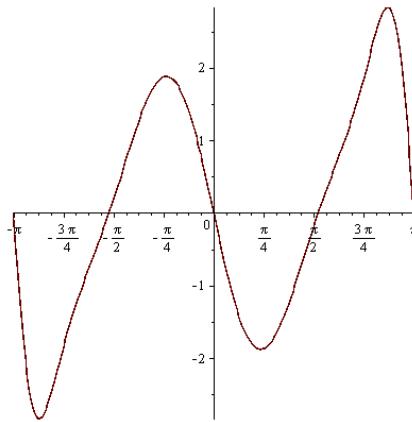
Portanto:

$$\tau_{\beta\alpha} := (\alpha, \theta) \rightarrow \tau_{\beta\alpha}^{(zero)}(\alpha, \theta) + \tau_{\beta\alpha}^{(um)}(\alpha, \theta) :$$

Furo 1:

$$\tau_{\beta\alpha}^{auxiliar1} := \text{ang} \rightarrow \tau_{\beta\alpha}(\alpha_1, \text{ang}) :$$

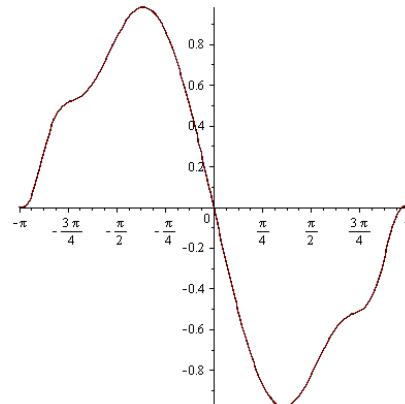
$$\text{plot}(\tau_{\beta\alpha}^{auxiliar1}, -\pi .. \pi)$$



Furo 2:

$$\tau_{\beta\alpha}^{auxiliar2} := \text{ang} \rightarrow \tau_{\beta\alpha}(\alpha_2, \text{ang}) :$$

$$\text{plot}(\tau_{\beta\alpha}^{auxiliar2}, -\pi .. \pi)$$



sigma_beta

A tensão é calculada a partira das tensões fundamental e auxiliar.

Tensão fundamental:

(15)

$$\sigma_{\beta}^{(zero)} := (\alpha, \theta) \rightarrow \frac{1}{(\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta)))^2} \left(\sigma_{11}^{\infty} \cdot \sinh^2(\alpha) \cdot \sin^2(\beta(\alpha, \theta)) + \sigma_{22}^{\infty} \right. \\ \cdot (1 - \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta(\alpha, \theta)))^2 + 2 \cdot \sigma_{12}^{\infty} \cdot (1 - \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta(\alpha, \theta))) \cdot \sinh(\alpha) \\ \cdot \sin(\beta(\alpha, \theta)) \right) :$$

Tensão auxiliar:

(20)

$$\sigma_{\beta}^{(um)} := (\alpha, \theta) \rightarrow \frac{K}{2} \cdot (\cos(2 \cdot \alpha) - 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta(\alpha, \theta)) + \cos(2 \cdot \beta(\alpha, \theta))) + B \\ \cdot \sinh(\alpha) \cdot (\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta))) + \sum_{n=1}^{100} (\phi_{Nn}(\alpha, \theta) \cdot (\cos(\beta(\alpha, \theta)) \cdot \cos(n \cdot \beta(\alpha, \theta))) \\ + n \cdot \sin(\beta(\alpha, \theta)) \cdot \sin(n \cdot \beta(\alpha, \theta))) - \phi_{linhaN}(\alpha, \theta) \cdot \sinh(\alpha) \cdot \cos(n \cdot \beta(\alpha, \theta)) \\ + \phi_{linha2N}(\alpha, \theta) \cdot (\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta))) \cdot \cos(n \cdot \beta(\alpha, \theta)) + \psi_{Nn}(\alpha, \theta) \cdot (\cos(\beta(\alpha, \theta)) \cdot \sin(n \cdot \beta(\alpha, \theta))) \\ - n \cdot \sin(\beta(\alpha, \theta)) \cdot \cos(n \cdot \beta(\alpha, \theta)) - \psi_{linhaN}(\alpha, \theta) \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sin(n \cdot \beta(\alpha, \theta)) \\ + \psi_{linha2N}(\alpha, \theta) \cdot (\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta))) \cdot \sin(n \cdot \beta(\alpha, \theta))) :$$

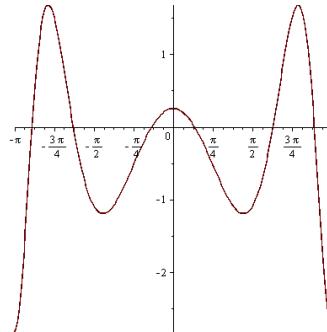
Portanto:

$$\sigma_{\beta} := (\alpha, \theta) \rightarrow \sigma_{\beta}^{(zero)} + \sigma_{\beta}^{(um)} :$$

Furo 1:

$$\sigma_{\beta}^{auxiliar1} := ang \rightarrow \sigma_{\beta}(\alpha_1, ang) :$$

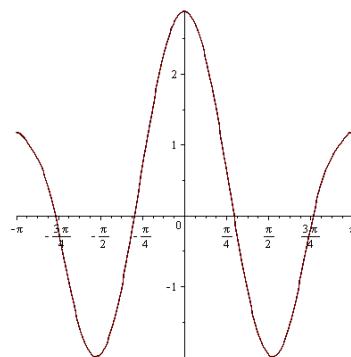
$$plot(\sigma_{\beta}^{auxiliar1}, -\pi .. \pi)$$



Furo 2:

$$\sigma_{\beta}^{auxiliar2} := ang \rightarrow \sigma_{\beta}(\alpha_2, ang) :$$

$$plot(\sigma_{\beta}^{auxiliar2}, -\pi .. \pi)$$



7.4 Anexo 4 – Programação para a dedução das tensões a partir de h_χ

$$\begin{aligned}
 h_\chi &:= (\alpha, \beta) \rightarrow (B \cdot \alpha + K \cdot \ln(\cosh(\alpha) - \cos(\beta))) \cdot (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) + \sum_{n=1}^{\infty} (\phi_N(n, \alpha) \\
 &\quad \cdot \cos(n \cdot \beta) + \psi_N(n, \alpha) \cdot \sin(n \cdot \beta)) \\
 &(\alpha, \beta) \rightarrow (B \alpha + K \ln(\cosh(\alpha) - \cos(\beta))) (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) + \sum_{n=1}^{\infty} (n \phi_N \alpha \cos(n \beta) \\
 &\quad + n \psi_N \alpha \sin(n \beta))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\alpha\alpha} &:= (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} (\phi_\chi(\alpha, \beta)) \right) - \sinh(\alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} (\phi_\chi(\alpha, \beta)) - \sin(\beta) \\
 &\cdot \frac{\partial}{\partial \beta} (\phi_\chi(\alpha, \beta)) + \cosh(\alpha) \cdot (\phi_\chi(\alpha, \beta)) \\
 &(\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) \left(K \cos(\beta) + \frac{K \sin(\beta)^2}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta)} + (B \alpha + K \ln(\cosh(\alpha) \\
 &\quad - \cos(\beta))) \cos(\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} (-n \phi_N \alpha \cos(n \beta) n^2 - n \psi_N \alpha \sin(n \beta) n^2) \right) \\
 &- \sinh(\alpha) \left(\left(B + \frac{K \sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta)} \right) (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) + (B \alpha + K \ln(\cosh(\alpha) \\
 &\quad - \cos(\beta))) \sinh(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} n \phi_N \alpha \right) \cos(n \beta) + \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} n \psi_N \alpha \right) \sin(n \beta) \right) \right) \\
 &- \sin(\beta) \left(K \sin(\beta) + (B \alpha + K \ln(\cosh(\alpha) - \cos(\beta))) \sin(\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} (-n \phi_N \alpha \sin(n \beta) n + n \psi_N \alpha \cos(n \beta) n) \right) + \cosh(\alpha) \left((B \alpha + K \ln(\cosh(\alpha) \\
 &\quad - \cos(\beta))) (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) + \sum_{n=1}^{\infty} (n \phi_N \alpha \cos(n \beta) + n \psi_N \alpha \sin(n \beta)) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\beta\beta} &:= (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} (\phi_\chi(\alpha, \beta)) \right) - \sinh(\alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} (\phi_\chi(\alpha, \beta)) - \sin(\beta) \\
 &\cdot \frac{\partial}{\partial \beta} (\phi_\chi(\alpha, \beta)) + \cosh(\beta) \cdot (\phi_\chi(\alpha, \beta))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) \left(\left(\frac{K \cosh(\alpha)}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta)} - \frac{K \sinh(\alpha)^2}{(\cosh(\alpha) - \cos(\beta))^2} \right) (\cosh(\alpha) \right. \\
& \left. - \cos(\beta)) + 2 \left(B + \frac{K \sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta)} \right) \sinh(\alpha) + (B \alpha + K \ln(\cosh(\alpha) \right. \\
& \left. - \cos(\beta))) \cosh(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} n \phi_N \alpha \right) \cos(n \beta) \right. \\
& \left. + \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} n \psi_N \alpha \right) \sin(n \beta) \right) \left. - \sinh(\alpha) \left(\left(B + \frac{K \sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta)} \right) (\cosh(\alpha) \right. \right. \\
& \left. \left. - \cos(\beta)) + (B \alpha + K \ln(\cosh(\alpha) - \cos(\beta))) \sinh(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \right. \\
& \left. \left(\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} n \phi_N \alpha \right) \cos(n \beta) + \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} n \psi_N \alpha \right) \sin(n \beta) \right) \right) - \sin(\beta) \left(K \sin(\beta) + (B \alpha \right. \\
& \left. + K \ln(\cosh(\alpha) - \cos(\beta))) \sin(\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} (-n \phi_N \alpha \sin(n \beta) n \right. \\
& \left. + n \psi_N \alpha \cos(n \beta) n) \right) + \cosh(\beta) \left((B \alpha + K \ln(\cosh(\alpha) - \cos(\beta))) (\cosh(\alpha) \right. \\
& \left. - \cos(\beta)) + \sum_{n=1}^{\infty} (n \phi_N \alpha \cos(n \beta) + n \psi_N \alpha \sin(n \beta)) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\alpha\beta} := & -(\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} (\psi(\alpha, \beta)) \right) \\
& -(\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) \left(\left(B + \frac{K \sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta)} \right) \sin(\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} \right. \\
& \left. - \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} n \phi_N \alpha \right) \sin(n \beta) n + \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} n \psi_N \alpha \right) \cos(n \beta) n \right)
\end{aligned}$$

E, considerando:

$$\phi_I := \alpha \rightarrow A_I \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) + B_I + C_I \cdot \sinh(2 \cdot \alpha) :$$

$$\psi_I := \alpha \rightarrow a_I \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) + c_I \cdot \sinh(2 \cdot \alpha) :$$

$$\phi_n := (n, \alpha) \rightarrow A_n(n) \cdot \cosh((n+1) \cdot \alpha) + B_n(n) \cdot \cosh((n-1) \cdot \alpha) + C_n(n) \cdot \sinh((n+1) \cdot \alpha) + D_n(n) \cdot \sinh((n-1) \cdot \alpha) :$$

$$\psi_n := (n, \alpha) \rightarrow a_n(n) \cdot \cosh((n+1) \cdot \alpha) + b_n(n) \cdot \cosh((n-1) \cdot \alpha) + c_n(n) \cdot \sinh((n+1) \cdot \alpha) + d_n(n) \cdot \sinh((n-1) \cdot \alpha) :$$

$$\phi_N := (n, \alpha) \rightarrow \begin{cases} \phi_I(\alpha) & n < 2 \\ \phi_n(n, \alpha) & n \geq 2 \end{cases} :$$

$$\psi_N := (n, \alpha) \rightarrow \begin{cases} \psi_I(\alpha) & n < 2 \\ \psi_n(n, \alpha) & n \geq 2 \end{cases} :$$

Obtemos, explicitamente:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\alpha} &:= (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} (\psi_N(\alpha, \beta)) \right) - \sinh(\alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} (\psi_N(\alpha, \beta)) - \sin(\beta) \\
&\quad \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} (\psi_N(\alpha, \beta)) + \cosh(\alpha) \cdot (\psi_N(\alpha, \beta)) \\
&(\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) \left(K \cos(\beta) + \frac{K \sin(\beta)^2}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta)} + (B\alpha + K \ln(\cosh(\alpha) \right. \\
&\quad \left. - \cos(\beta))) \cos(\beta) - (A_I \cosh(2\alpha) + B_I + C_I \sinh(2\alpha)) \cos(\beta) - (a_I \cosh(2\alpha) \right. \\
&\quad \left. + c_I \sinh(2\alpha)) \sin(\beta) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(- (A_n(n) \cosh((n+1)\alpha) + B_n(n) \cosh((n-1)\alpha) \right. \\
&\quad \left. + C_n(n) \sinh((n+1)\alpha) + D_n(n) \sinh((n-1)\alpha)) \cos(n\beta) n^2 - (a_n(n) \cosh((n+1)\alpha) \right. \\
&\quad \left. + b_n(n) \cosh((n-1)\alpha) + c_n(n) \sinh((n+1)\alpha) + d_n(n) \sinh((n-1)\alpha)) \right. \\
&\quad \left. \sin(n\beta) n^2 \right) - \sinh(\alpha) \left(\left(B + \frac{K \sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta)} \right) (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) + (B\alpha \right. \\
&\quad \left. + K \ln(\cosh(\alpha) - \cos(\beta))) \sinh(\alpha) + (2A_I \sinh(2\alpha) + 2C_I \cosh(2\alpha)) \cos(\beta) \right. \\
&\quad \left. + (2a_I \sinh(2\alpha) + 2c_I \cosh(2\alpha)) \sin(\beta) + \sum_{n=2}^{\infty} \left((A_n(n) \sinh((n+1)\alpha) (n+1) \right. \right. \\
&\quad \left. + B_n(n) \sinh((n-1)\alpha) (n-1) + C_n(n) \cosh((n+1)\alpha) (n+1) + D_n(n) \cosh((n-1)\alpha) (n-1) \right) \cos(n\beta) + (a_n(n) \sinh((n+1)\alpha) (n+1) \right. \\
&\quad \left. + b_n(n) \sinh((n-1)\alpha) (n-1) + c_n(n) \cosh((n+1)\alpha) (n+1) + d_n(n) \cosh((n-1)\alpha) (n-1)) \right. \\
&\quad \left. \sin(n\beta) \right) \right) \\
&- \sin(\beta) \left(K \sin(\beta) + (B\alpha + K \ln(\cosh(\alpha) - \cos(\beta))) \sin(\beta) - (A_I \cosh(2\alpha) + B_I \right. \\
&\quad \left. + C_I \sinh(2\alpha)) \sin(\beta) + (a_I \cosh(2\alpha) + c_I \sinh(2\alpha)) \cos(\beta) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (A_n(n) \cosh((n+1)\alpha) + B_n(n) \cosh((n-1)\alpha) + C_n(n) \sinh((n+1)\alpha) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + D_n(n) \sinh((n-1)\alpha)) \sin(n\beta) n + (a_n(n) \cosh((n+1)\alpha) + b_n(n) \cosh((n-1)\alpha) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + c_n(n) \sinh((n+1)\alpha) + d_n(n) \sinh((n-1)\alpha)) \cos(n\beta) n \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cosh(\alpha) \left((B\alpha + K \ln(\cosh(\alpha) - \cos(\beta))) (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) + (A_I \cosh(2\alpha) + B_I \right. \\
& \quad \left. + C_I \sinh(2\alpha)) \cos(\beta) + (a_I \cosh(2\alpha) + c_I \sinh(2\alpha)) \sin(\beta) + \sum_{n=2}^{\infty} \right. \\
& \quad \left. ((A_n(n) \cosh((n+1)\alpha) + B_n(n) \cosh((n-1)\alpha) + C_n(n) \sinh((n+1)\alpha) \right. \\
& \quad \left. + D_n(n) \sinh((n-1)\alpha)) \cos(n\beta) + (a_n(n) \cosh((n+1)\alpha) + b_n(n) \cosh((n \right. \\
& \quad \left. - 1)\alpha) + c_n(n) \sinh((n+1)\alpha) + d_n(n) \sinh((n-1)\alpha)) \sin(n\beta) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\beta\beta} := & (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} (\textcolor{purple}{h}_{\textcolor{purple}{X}}(\alpha, \beta)) \right) - \sinh(\alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} (\textcolor{purple}{h}_{\textcolor{purple}{X}}(\alpha, \beta)) - \sin(\beta) \\
& \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} (\textcolor{purple}{h}_{\textcolor{purple}{X}}(\alpha, \beta)) + \cosh(\beta) \cdot (\textcolor{purple}{h}_{\textcolor{purple}{X}}(\alpha, \beta))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) \left(\left(\frac{K \cosh(\alpha)}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta)} - \frac{K \sinh(\alpha)^2}{(\cosh(\alpha) - \cos(\beta))^2} \right) (\cosh(\alpha) \right. \\
& \quad \left. - \cos(\beta)) + 2 \left(B + \frac{K \sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta)} \right) \sinh(\alpha) + (B\alpha + K \ln(\cosh(\alpha) \right. \\
& \quad \left. - \cos(\beta))) \cosh(\alpha) + (4A_I \cosh(2\alpha) + 4C_I \sinh(2\alpha)) \cos(\beta) + (4a_I \cosh(2\alpha) \right. \\
& \quad \left. + 4c_I \sinh(2\alpha)) \sin(\beta) + \sum_{n=2}^{\infty} ((A_n(n) \cosh((n+1)\alpha) (n+1)^2 + B_n(n) \cosh((n \right. \\
& \quad \left. - 1)\alpha) (n-1)^2 + C_n(n) \sinh((n+1)\alpha) (n+1)^2 + D_n(n) \sinh((n-1)\alpha) (n \right. \\
& \quad \left. - 1)^2) \cos(n\beta) + (a_n(n) \cosh((n+1)\alpha) (n+1)^2 + b_n(n) \cosh((n-1)\alpha) (n-1)^2 \right. \\
& \quad \left. + c_n(n) \sinh((n+1)\alpha) (n+1)^2 + d_n(n) \sinh((n-1)\alpha) (n-1)^2) \sin(n\beta) \right) \\
& \quad - \sinh(\alpha) \left(\left(B + \frac{K \sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta)} \right) (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) + (B\alpha + K \ln(\cosh(\alpha) \right. \\
& \quad \left. - \cos(\beta))) \sinh(\alpha) + (2A_I \sinh(2\alpha) + 2C_I \cosh(2\alpha)) \cos(\beta) + (2a_I \sinh(2\alpha) \right. \\
& \quad \left. + 2c_I \cosh(2\alpha)) \sin(\beta) + \sum_{n=2}^{\infty} ((A_n(n) \sinh((n+1)\alpha) (n+1) + B_n(n) \sinh((n \right. \\
& \quad \left. - 1)\alpha) (n-1) + C_n(n) \cosh((n+1)\alpha) (n+1) + D_n(n) \cosh((n-1)\alpha) (n-1)) \cos(n\beta) + (a_n(n) \sinh((n+1)\alpha) (n+1) + b_n(n) \sinh((n-1)\alpha) (n-1) \right. \\
& \quad \left. + c_n(n) \cosh((n+1)\alpha) (n+1) + d_n(n) \cosh((n-1)\alpha) (n-1)) \sin(n\beta) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sin(\beta) \left(K \sin(\beta) + (B \alpha + K \ln(\cosh(\alpha) - \cos(\beta))) \sin(\beta) - (A_I \cosh(2 \alpha) + B_I \right. \\
& \quad \left. + C_I \sinh(2 \alpha)) \sin(\beta) + (a_I \cosh(2 \alpha) + c_I \sinh(2 \alpha)) \cos(\beta) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (A_n(n) \cosh((n+1)\alpha) + B_n(n) \cosh((n-1)\alpha) + C_n(n) \sinh((n+1)\alpha) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + D_n(n) \sinh((n-1)\alpha)) \sin(n\beta) n + (a_n(n) \cosh((n+1)\alpha) + b_n(n) \cosh((n-1)\alpha) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + c_n(n) \sinh((n+1)\alpha) + d_n(n) \sinh((n-1)\alpha)) \cos(n\beta) n \right) \right) \\
& + \cosh(\beta) \left((B \alpha + K \ln(\cosh(\alpha) - \cos(\beta))) (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) + (A_I \cosh(2 \alpha) + B_I \right. \\
& \quad \left. + C_I \sinh(2 \alpha)) \cos(\beta) + (a_I \cosh(2 \alpha) + c_I \sinh(2 \alpha)) \sin(\beta) + \sum_{n=2}^{\infty} \right. \\
& \quad \left. \left((A_n(n) \cosh((n+1)\alpha) + B_n(n) \cosh((n-1)\alpha) + C_n(n) \sinh((n+1)\alpha) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + D_n(n) \sinh((n-1)\alpha)) \cos(n\beta) + (a_n(n) \cosh((n+1)\alpha) + b_n(n) \cosh((n-1)\alpha) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + c_n(n) \sinh((n+1)\alpha) + d_n(n) \sinh((n-1)\alpha)) \sin(n\beta) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\alpha\beta} & := -(\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} (\textcolor{blue}{h}_{\textcolor{red}{X}}(\alpha, \beta)) \right) \\
& - (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) \left(\left(B + \frac{K \sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta)} \right) \sin(\beta) - (2 A_I \sinh(2 \alpha) \right. \\
& \quad \left. + 2 C_I \cosh(2 \alpha)) \sin(\beta) + (2 a_I \sinh(2 \alpha) + 2 c_I \cosh(2 \alpha)) \cos(\beta) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (A_n(n) \sinh((n+1)\alpha) (n+1) + B_n(n) \sinh((n-1)\alpha) (n-1) + C_n(n) \cosh((n+1)\alpha) (n+1) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + D_n(n) \cosh((n-1)\alpha) (n-1)) \sin(n\beta) n + (a_n(n) \sinh((n+1)\alpha) (n+1) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + b_n(n) \sinh((n-1)\alpha) (n-1) + c_n(n) \cosh((n+1)\alpha) (n+1) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + d_n(n) \cosh((n-1)\alpha) (n-1)) \cos(n\beta) n \right) \right)
\end{aligned}$$

7.5 Anexo 5 – Programação da comparação das tensões radiais deduzidas com as propostas por Radi (2011)

Neste teste, serão consideradas as tensões como a soma das tensões fundamental e auxiliar.

Primeiramente, considerando as fórmulas deduzidas por Radi.

Em seguida, comparando com as rededuzidas por meio da fórmula de Jeffery.
[numeração de fórmulas conforme Radi (2011)]

Tensão fundamental (Radi):

(15)

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha}^{(zero)} := (\alpha, \theta) \rightarrow & \frac{1}{(\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta)))^2} \left(\sigma_{11}^{\infty} \cdot (1 - \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta(\alpha, \theta)))^2 \right. \\ & + \sigma_{22}^{\infty} \cdot \sinh^2(\alpha) \cdot \sin^2(\beta(\alpha, \theta)) - 2 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot (1 - \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta(\alpha, \theta))) \cdot \sinh(\alpha) \\ & \cdot \sin(\beta(\alpha, \theta)) \left. \right) :\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\beta}^{(zero)} := (\alpha, \theta) \rightarrow & \frac{1}{(\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta)))^2} \left(\sigma_{11}^{\infty} \cdot \sinh^2(\alpha) \cdot \sin^2(\beta(\alpha, \theta)) + \sigma_{22}^{\infty} \right. \\ & \cdot (1 - \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta(\alpha, \theta)))^2 + 2 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot (1 - \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta(\alpha, \theta))) \cdot \sinh(\alpha) \\ & \cdot \sin(\beta(\alpha, \theta)) \left. \right) :\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{\beta\alpha}^{(zero)} := (\alpha, \theta) \rightarrow & \frac{1}{(\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta)))^2} \left((\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty}) \cdot (1 - \cosh(\alpha) \right. \\ & \cdot \cos(\beta(\alpha, \theta))) \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sin(\beta(\alpha, \theta)) + \tau_{12}^{\infty} \cdot (\sinh^2(\alpha) \cdot \sin^2(\beta(\alpha, \theta)) - (1 \\ & - \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta(\alpha, \theta)))^2) \left. \right) :\end{aligned}$$

As componentes de tensão derivadas da função de tensão auxiliar são (Radi):

(20)

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha}^{(um)} := (\alpha, \theta) \rightarrow & -\frac{K}{2} \cdot (\cosh(2 \cdot \alpha) - 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta(\alpha, \theta)) + \cos(2 \cdot \beta(\alpha, \theta))) - B \\ & \cdot \sinh(\alpha) \cdot (\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta))) + \sum_{n=1}^{100} \left(\phi_N(n, \alpha) \cdot (\cosh(\alpha) \cdot \cos(n \cdot \beta(\alpha, \theta)) - n^2 \right. \\ & \cdot (\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta))) \cdot \cos(n \cdot \beta(\alpha, \theta)) + n \cdot \sin(\beta(\alpha, \theta)) \cdot \sin(n \cdot \beta(\alpha, \theta))) + \frac{1}{2} \\ & \cdot \psi_N(n, \alpha) \cdot (n^2 \cdot \cos(\beta(\alpha, \theta)) \cdot \sin(n \cdot \beta(\alpha, \theta)) - (n^2 - 1) \cdot \cosh(\alpha) \cdot \sin(n \cdot \beta(\alpha, \theta)) - n \\ & \cdot \sin(\beta(\alpha, \theta)) \cdot \cos(n \cdot \beta(\alpha, \theta))) - \phi_N(n, \alpha) \cdot \sinh(\alpha) \cdot \cos(n \cdot \beta(\alpha, \theta)) - \psi_N(n, \alpha) \\ & \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sin(n \cdot \beta(\alpha, \theta)) \left. \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha, \theta) \rightarrow & -\frac{1}{2} K (\cosh(2\alpha) - 2 \cosh(\alpha) \cos(\beta(\alpha, \theta)) + \cos(2\beta(\alpha, \theta))) \\
& - B \sinh(\alpha) (\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta))) + \sum_{n=1}^{100} \left(n \phi_N \alpha (\cosh(\alpha) \cos(n\beta(\alpha, \theta)) \right. \\
& - n^2 (\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta))) \cos(n\beta(\alpha, \theta)) + n \sin(\beta(\alpha, \theta)) \sin(n\beta(\alpha, \theta))) \\
& + \frac{1}{2} n \psi_N \alpha (n^2 \cos(\beta(\alpha, \theta)) \sin(n\beta(\alpha, \theta)) - (n^2 - 1) \cosh(\alpha) \sin(n\beta(\alpha, \theta))) \\
& \left. - n \sin(\beta(\alpha, \theta)) \cos(n\beta(\alpha, \theta)) \right) - \phi_N(n, \alpha) \sinh(\alpha) \cos(n\beta(\alpha, \theta)) - \psi_N(n, \\
& \alpha) \sinh(\alpha) \sin(n\beta(\alpha, \theta)) \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\#\sigma_{\beta}^{(um)} := & (\alpha, \theta) \rightarrow \frac{K}{2} \cdot (\cos(2\alpha) - 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta(\alpha, \theta)) + \cos(2\beta(\alpha, \theta))) + B \\
& \cdot \sinh(\alpha) \cdot (\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta))) + \sum_{n=1}^{100} \left(\phi_N(n, \alpha) \cdot (\cos(\beta(\alpha, \theta)) \cdot \cos(n\beta(\alpha, \theta)) \right. \\
& + n \cdot \sin(\beta(\alpha, \theta)) \cdot \sin(n\beta(\alpha, \theta)) - \phi_N(n, \alpha) \cdot \sinh(\alpha) \cdot \cos(n\beta(\alpha, \theta)) + \phi'_N(n, \alpha) \\
& \cdot (\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta))) \cdot \cos(n\beta(\alpha, \theta)) + \psi_N(n, \alpha) \cdot (\cos(\beta(\alpha, \theta)) \cdot \sin(n\beta(\alpha, \theta)) \\
& - n \cdot \sin(\beta(\alpha, \theta)) \cdot \cos(n\beta(\alpha, \theta)) - \psi'_N(n, \alpha) \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sin(n\beta(\alpha, \theta)) + \psi''_N(n, \alpha) \\
& \cdot (\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta))) \cdot \sin(n\beta(\alpha, \theta)) \Big) : \\
\#\tau_{\beta\alpha}^{(um)} := & (\alpha, \theta) \rightarrow - (K \cdot \sinh(\alpha) + B \cdot \cosh(\alpha)) \cdot \sin(\beta(\alpha, \theta)) + \frac{B}{2} \cdot \sin(2\beta(\alpha, \theta)) \\
& + (\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta))) \cdot \sum_{n=1}^{100} n \cdot \left(\phi'_N(n, \alpha) \cdot \sin(n\beta(\alpha, \theta)) - \psi'_N(n, \alpha) \cdot \cos(n\beta(\alpha, \theta)) \right) :
\end{aligned}$$

Condições do teste:

$$r_1 := 15.5 :$$

$$r_2 := 18.5 :$$

$$d := 44 :$$

$$\tau_{12}^{\infty} := 0 :$$

$$\sigma_{11}^{\infty} := 0 :$$

$$\sigma_{22}^{\infty} := 1 :$$

$$p_1 := 0 :$$

$$p_2 := 0 :$$

Teste de rededução (apenas para alpha):

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha}^{(umTESTE)} := (\alpha, \theta) \rightarrow & (\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta))) \left[K \cos(\beta(\alpha, \theta)) \right. \\
& + \frac{K \sin(\beta(\alpha, \theta))^2}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta))} + (B \alpha + K \ln(\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta)))) \cos(\beta(\alpha, \theta)) \\
& - (\textcolor{violet}{A}_I \cosh(2\alpha) + \textcolor{violet}{B}_I + \textcolor{violet}{C}_I \sinh(2\alpha)) \cos(\beta(\alpha, \theta)) - (\textcolor{violet}{a}_I \cosh(2\alpha) \\
& + \textcolor{violet}{c}_I \sinh(2\alpha)) \sin(\beta(\alpha, \theta)) + \sum_{n=2}^{100} \left(-(\textcolor{violet}{A}_n(n) \cosh((n+1)\alpha) + \textcolor{violet}{B}_n(n) \cosh((n-1)\alpha) \right. \\
& + \textcolor{violet}{C}_n(n) \sinh((n+1)\alpha) + \textcolor{violet}{D}_n(n) \sinh((n-1)\alpha)) \cos(n\beta(\alpha, \theta)) n^2 \\
& - (\textcolor{violet}{a}_n(n) \cosh((n+1)\alpha) + \textcolor{violet}{b}_n(n) \cosh((n-1)\alpha) + \textcolor{violet}{c}_n(n) \sinh((n+1)\alpha) \\
& + \textcolor{violet}{d}_n(n) \sinh((n-1)\alpha)) \sin(n\beta(\alpha, \theta)) n^2 \left. \right) - \sinh(\alpha) \left[\left(B \right. \right. \\
& + \frac{K \sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta))} \left. \right) (\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta))) + (B \alpha + K \ln(\cosh(\alpha) \\
& - \cos(\beta(\alpha, \theta)))) \sinh(\alpha) + (2\textcolor{violet}{A}_I \sinh(2\alpha) + 2\textcolor{violet}{C}_I \cosh(2\alpha)) \cos(\beta(\alpha, \theta)) \\
& + (2\textcolor{violet}{a}_I \sinh(2\alpha) + 2\textcolor{violet}{c}_I \cosh(2\alpha)) \sin(\beta(\alpha, \theta)) + \sum_{n=2}^{100} \left((\textcolor{violet}{A}_n(n) \sinh((n+1)\alpha) (n+1) \right. \\
& + \textcolor{violet}{B}_n(n) \sinh((n-1)\alpha) (n-1) + \textcolor{violet}{C}_n(n) \cosh((n+1)\alpha) (n+1) \\
& + \textcolor{violet}{D}_n(n) \cosh((n-1)\alpha) (n-1)) \cos(n\beta(\alpha, \theta)) + (\textcolor{violet}{a}_n(n) \sinh((n+1)\alpha) (n+1) \\
& + \textcolor{violet}{b}_n(n) \sinh((n-1)\alpha) (n-1) + \textcolor{violet}{c}_n(n) \cosh((n+1)\alpha) (n+1) + \textcolor{violet}{d}_n(n) \cosh((n-1)\alpha) (n-1) \left. \right) \sin(n\beta(\alpha, \theta)) \left. \right) - \sin(\beta(\alpha, \theta)) \left[K \sin(\beta(\alpha, \theta)) + (B \alpha \right. \\
& + K \ln(\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta)))) \sin(\beta(\alpha, \theta)) - (\textcolor{violet}{A}_I \cosh(2\alpha) + \textcolor{violet}{B}_I \\
& + \textcolor{violet}{C}_I \sinh(2\alpha)) \sin(\beta(\alpha, \theta)) + (\textcolor{violet}{a}_I \cosh(2\alpha) + \textcolor{violet}{c}_I \sinh(2\alpha)) \cos(\beta(\alpha, \theta)) + \sum_{n=2}^{100} \left(\right. \\
& - (\textcolor{violet}{A}_n(n) \cosh((n+1)\alpha) + \textcolor{violet}{B}_n(n) \cosh((n-1)\alpha) + \textcolor{violet}{C}_n(n) \sinh((n+1)\alpha) \\
& + \textcolor{violet}{D}_n(n) \sinh((n-1)\alpha)) \sin(n\beta(\alpha, \theta)) n + (\textcolor{violet}{a}_n(n) \cosh((n+1)\alpha) + \textcolor{violet}{b}_n(n) \cosh((n-1)\alpha) \\
& + \textcolor{violet}{c}_n(n) \sinh((n+1)\alpha) + \textcolor{violet}{d}_n(n) \sinh((n-1)\alpha)) \cos(n\beta(\alpha, \theta)) n \left. \right) \\
& + \cosh(\alpha) \left[(B \alpha + K \ln(\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta)))) (\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta))) \right. \\
& + (\textcolor{violet}{A}_I \cosh(2\alpha) + \textcolor{violet}{B}_I + \textcolor{violet}{C}_I \sinh(2\alpha)) \cos(\beta(\alpha, \theta)) + (\textcolor{violet}{a}_I \cosh(2\alpha) \\
& + \textcolor{violet}{c}_I \sinh(2\alpha)) \sin(\beta(\alpha, \theta)) + \sum_{n=2}^{100} \left((\textcolor{violet}{A}_n(n) \cosh((n+1)\alpha) + \textcolor{violet}{B}_n(n) \cosh((n-1)\alpha) \right. \\
& + \textcolor{violet}{C}_n(n) \sinh((n+1)\alpha) + \textcolor{violet}{D}_n(n) \sinh((n-1)\alpha)) \cos(n\beta(\alpha, \theta)) + (\textcolor{violet}{a}_n(n) \cosh((n+1)\alpha) \\
& + \textcolor{violet}{b}_n(n) \cosh((n-1)\alpha) + \textcolor{violet}{c}_n(n) \sinh((n+1)\alpha) + \textcolor{violet}{d}_n(n) \sinh((n-1)\alpha)) \\
& \left. \sin(n\beta(\alpha, \theta)) \right) :
\end{aligned}$$

$$Compara := (\alpha, \theta) \rightarrow \sigma_{\alpha}^{(um)}(\alpha, \theta) - \sigma_{\alpha}^{(umTESTE)}(\alpha, \theta) :$$

Radi:

$$\sigma_{\alpha}^{(um)}(\alpha_I, 0) \\ 2.037596149$$

Jeferry novo

$$\sigma_{\alpha}^{(umTESTE)}(\alpha_I, 0) \\ 2.037596141$$

Comparação entre eles:

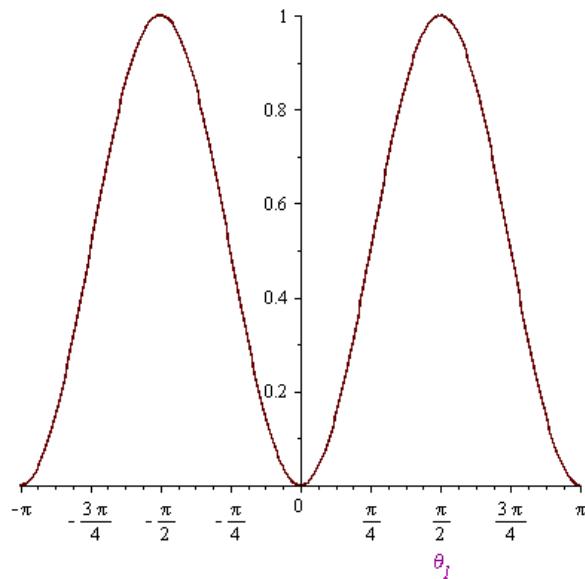
$$Compara(\alpha_I, 0) \\ 8 \cdot 10^{-9}$$

Tensão fundamental e auxiliar:

Para o furo 1:

$$\sigma_{\alpha}^{(ZEROauxiliar)} := \sigma_{\alpha}^{(zero)}(\alpha_I, \theta_I) :$$

$$plot(\sigma_{\alpha}^{(ZEROauxiliar)}, \theta_I = -\pi .. \pi)$$

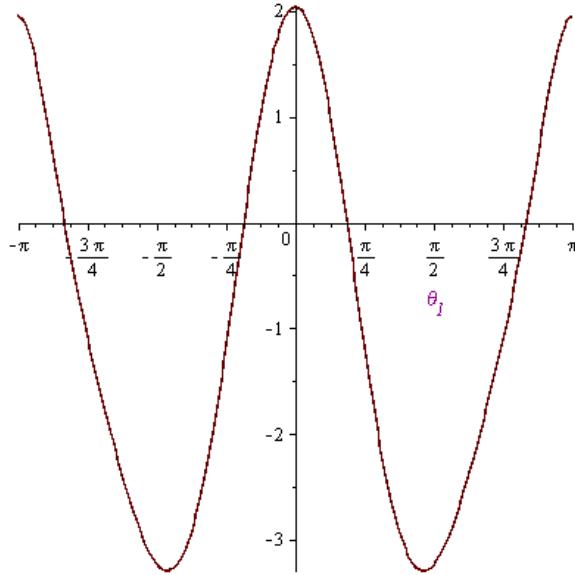


Ou seja, a tensão fundamental $\sigma_{\alpha}(0)$ está correta (a direção da tensão radial varia com theta).

Mas, em contrapartida, a auxiliar:

$$\sigma_{\alpha}^{(UMauxiliarI)} := \sigma_{\alpha}^{(um)}(\alpha_I, \theta_I) :$$

$$plot(\sigma_{\alpha}^{(UMauxiliarI)}, \theta_I = -\pi .. \pi)$$

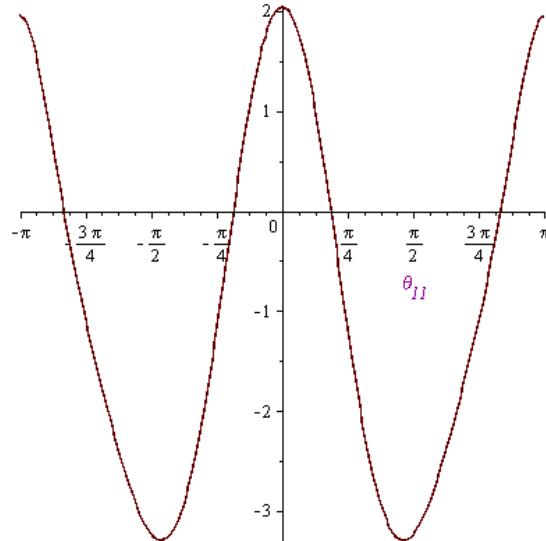


Não zera a fundamental (como deveria ser)

TESTE, com o expandido do Jeffery:

$$\sigma_{\alpha}^{(UMauxiliarI TESTE)} := \sigma_{\alpha}^{(um TESTE)}(\alpha_I, \theta_{II}) :$$

$$plot(\sigma_{\alpha}^{(UMauxiliarI TESTE)}, \theta_{II} = -\pi .. \pi)$$

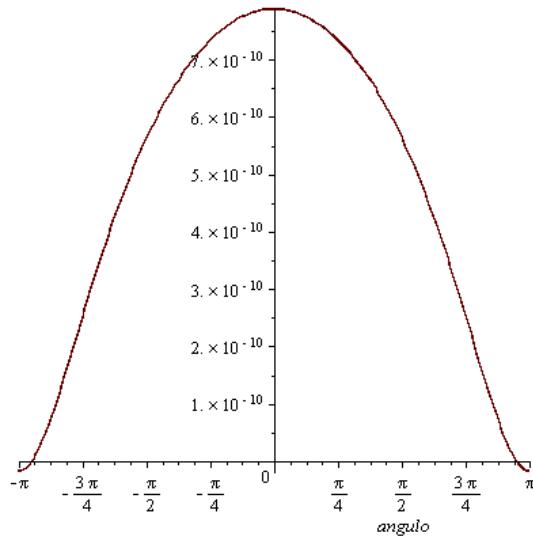


É praticamente igual à outra.

OU, se subtrair o deduzido de Radi...

$A := \text{Compara}(\alpha_j, \text{angulo}) :$

$\text{plot}(A, \text{angulo} = -\pi .. \pi)$



Ou seja, a fórmula encontrada por Radi é equivalente à rededuzida em Jeffery. O que pode estar errado são os parâmetros que nela são inseridos (por ex, A_n , etc). Ou seja, é necessário conferir a aplicação das condições de contorno.

7.6 Anexo 6 – Programação para a verificação das tensões radiais deduzidas através da expansão em séries de Fourier

[numeração de fórmulas conforme Radi (2011)]

(27)

$$S_0 := \alpha \rightarrow e^{-|\alpha|} \cdot \left(\sigma_{11}^{\infty} \cdot \cosh(\alpha) + \sigma_{22}^{\infty} \cdot \sinh(|\alpha|) \right) :$$

(28)

$$S_n := (n, \alpha) \rightarrow 2 \cdot \left(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} \right) \cdot g_n(n, \alpha) \cdot \sinh(|\alpha|) :$$

(29)

$$s_n := (n, \alpha) \rightarrow -4 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot g_n(n, \alpha) \cdot \sinh(\alpha) :$$

(27)

$$t_0 := \alpha \rightarrow -\tau_{12}^{\infty} \cdot e^{-2 \cdot |\alpha|} :$$

(28)

$$T_n := (n, \alpha) \rightarrow 2 \cdot \left(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} \right) \cdot g_n(n, \alpha) \cdot \sinh(\alpha) :$$

(29)

$$t_n := (n, \alpha) \rightarrow 4 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot g_n(n, \alpha) \cdot \sinh(|\alpha|) :$$

(30)

$$g_n := (n, \alpha) \rightarrow e^{-n \cdot |\alpha|} \cdot (\cosh(\alpha) - n \cdot \sinh(|\alpha|)) :$$

Tensão fundamental da eq (15) de Radi (já conferida)

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^{(zero)} := (\alpha, \theta) \rightarrow & \frac{1}{(\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta)))^2} \left(\sigma_{11}^{\infty} \cdot (1 - \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta(\alpha, \theta)))^2 \right. \\ & + \sigma_{22}^{\infty} \cdot \sinh^2(\alpha) \cdot \sin^2(\beta(\alpha, \theta)) - 2 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot (1 - \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta(\alpha, \theta))) \cdot \sinh(\alpha) \\ & \cdot \sin(\beta(\alpha, \theta)) \Big) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \# \sigma_{\beta}^{(zero)} := (\alpha, \theta) \rightarrow & \frac{1}{(\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta)))^2} \left(\sigma_{11}^{\infty} \cdot \sinh^2(\alpha) \cdot \sin^2(\beta(\alpha, \theta)) + \sigma_{22}^{\infty} \right. \\ & \cdot (1 - \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta(\alpha, \theta)))^2 + 2 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot (1 - \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta(\alpha, \theta))) \cdot \sinh(\alpha) \\ & \cdot \sin(\beta(\alpha, \theta)) \Big) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\beta\alpha}^{(zero)} := (\alpha, \theta) \rightarrow & \frac{1}{(\cosh(\alpha) - \cos(\beta(\alpha, \theta)))^2} \left((\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty}) \cdot (1 - \cosh(\alpha) \right. \\ & \cdot \cos(\beta(\alpha, \theta))) \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sin(\beta(\alpha, \theta)) + \tau_{12}^{\infty} \cdot (\sinh^2(\alpha) \cdot \sin^2(\beta(\alpha, \theta)) - (1 \\ & - \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta(\alpha, \theta)))^2) \Big) : \end{aligned}$$

Tensão fundamental aberta em séries de Fourier da eq (26) de Radi (a conferir):

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^{(zeroTESTfourier)} := (\alpha, \theta) \rightarrow & S_0(\alpha) + \sum_{n=1}^{100} \left(S_n(n, \alpha) \cdot \cos(n \cdot \beta(\alpha, \theta)) + s_n(n, \alpha) \cdot \sin(n \right. \\ & \cdot \beta(\alpha, \theta)) \Big) : \end{aligned}$$

$$\tau_{\beta\alpha}^{(zeroTESTEfouier)} := (\alpha, \theta) \rightarrow t_{\theta}(\alpha) + \sum_{n=1}^{100} (\textcolor{violet}{T}_n(n, \alpha) \cdot \sin(n \cdot \beta(\alpha, \theta)) + \textcolor{violet}{t}_n(n, \alpha) \cdot \cos(n \cdot \beta(\alpha, \theta))) :$$

Diferença:

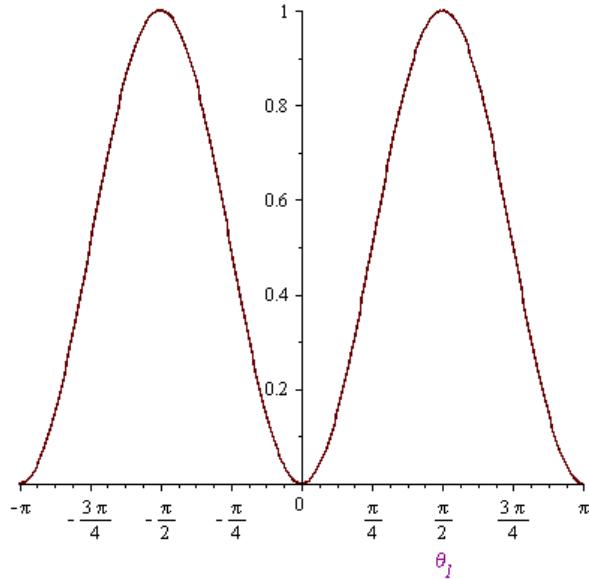
$$\sigma_{diferencaFourier} := (\alpha, \theta) \rightarrow \sigma_{\alpha}^{(zero)}(\alpha, \theta) - \sigma_{\alpha}^{(zeroTESTEfouier)}(\alpha, \theta) :$$

Diferença Fourier:

Para o furo 1:

$$\sigma_{\alpha}^{(ZEROauxiliar)} := \sigma_{\alpha}^{(zero)}(\alpha_I, \theta_I) :$$

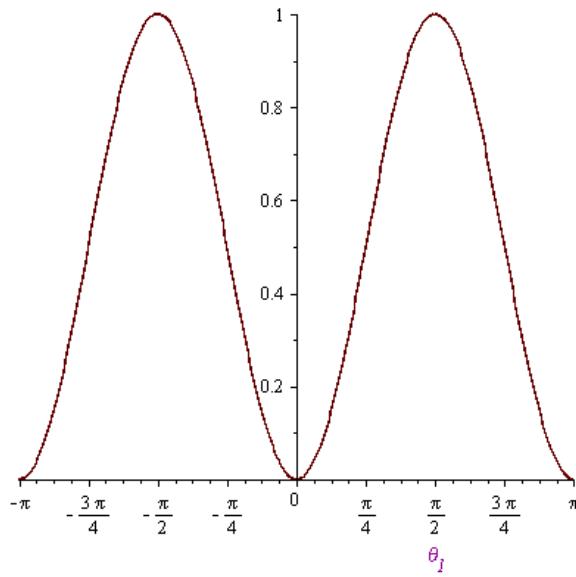
$$\text{plot}(\sigma_{\alpha}^{(ZEROauxiliar)}, \theta_I = -\pi .. \pi)$$



Teste Fourier:

$$\sigma_{\alpha}^{(ZEROauxiliar1Fourier)} := \sigma_{\alpha}^{(zeroTESTEfouier)}(\alpha_I, \theta_I) :$$

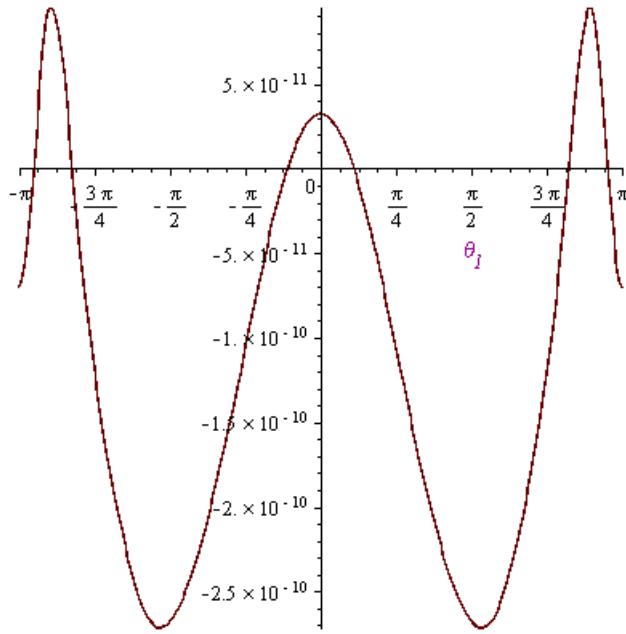
$$\text{plot}(\sigma_{\alpha}^{(ZEROauxiliar1Fourier)}, \theta_I = -\pi .. \pi)$$



Comparação:

$$\sigma_{\alpha}^{(\text{ZEROauxiliar1Comp})} := \sigma_{\text{diferencaFourier}}(\alpha_I, \theta_I) :$$

$$\text{plot}(\sigma_{\alpha}^{(\text{ZEROauxiliar1Comp})}, \theta_I = -\pi .. \pi)$$



Ou seja, por experimentação, ambas as fórmulas são idênticas.

7.7 Anexo 7 – Programação para a conferência da eq.(27)

[numeração de fórmulas conforme Radi (2011)]

(20) tensão auxiliar corrigida (termo de $B \cdot \sinh(\alpha)$ que faltava parêntesis)

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^{(I)} := & -\frac{K}{2} \cdot (\cosh(2 \cdot \alpha) - 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(2 \cdot \beta)) - B \cdot \sinh(\alpha) (\cosh(\alpha) \\ & - \cos(\beta)) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\phi_n \cdot (\cosh(\alpha) \cdot \cos(n \cdot \beta) - n^2 \cdot (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) \cdot \cos(n \cdot \beta) + n \right. \\ & \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(n \cdot \beta)) + \frac{1}{2} \cdot \psi_n \cdot (n^2 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(n \cdot \beta) - (n^2 - 1) \cdot \cosh(\alpha) \cdot \sin(n \cdot \beta) - n \\ & \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(n \cdot \beta)) - \phi_{linhan} \cdot \sinh(\alpha) \cdot \cos(n \cdot \beta) - \psi_{linhan} \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sin(n \cdot \beta) \right) : \end{aligned}$$

(26) tensão fundamental:

$$\sigma_{\alpha}^{(0)} := S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (S_n \cdot \cos(n \cdot \beta) + s_n \cdot \sin(n \cdot \beta)) :$$

Daí:

$$\sigma_{\alpha 20} = \sigma_{\alpha}^{(0)} + \sigma_{\alpha}^{(I)} :$$

(I)

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 20} := & S_0 - \frac{K}{2} \cdot (\cosh(2 \cdot \alpha) - 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(2 \cdot \beta)) - B \cdot \sinh(\alpha) (\cosh(\alpha) \\ & - \cos(\beta)) + \sum_{n=1}^{\infty} (S_n \cdot \cos(n \cdot \beta) + s_n \cdot \sin(n \cdot \beta)) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\phi_n \cdot (\cosh(\alpha) \cdot \cos(n \cdot \beta) - n^2 \right. \\ & \cdot (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) \cdot \cos(n \cdot \beta) + n \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(n \cdot \beta)) + \frac{1}{2} \cdot \psi_n \cdot (n^2 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(n \cdot \beta) \\ & - (n^2 - 1) \cdot \cosh(\alpha) \cdot \sin(n \cdot \beta) - n \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(n \cdot \beta)) - \phi_{linhan} \cdot \sinh(\alpha) \cdot \cos(n \cdot \beta) \\ & - \psi_{linhan} \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sin(n \cdot \beta) \right) : \end{aligned}$$

Queremos mostrar que a (31) é equivalente à (20):

(31)

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 31} := & S_0 + \phi_I - \frac{1}{2} \cdot (K \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) + B \cdot \sinh(2 \cdot \alpha)) + (K \cdot \cosh(\alpha) + B \cdot \sinh(\alpha)) \cdot \cos(\beta) \\ & - \frac{K}{2} \cdot \cos(2 \cdot \beta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot n} \cdot \left((\Phi_n(n-1) - 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Phi_n(n) + \Phi_n(n+1) - 2 \cdot \sinh(\alpha) \right. \\ & \cdot \Phi_{En}(n) + 2 \cdot n \cdot S_n) \cdot \cos(n \cdot \beta) + (\Psi_n(n-1) - 2 \cdot \Psi_n(n) \cdot \cosh(\alpha) + \Psi_n(n+1) - 2 \\ & \cdot \Psi_{En}(n) \cdot \sinh(\alpha) + 2 \cdot n \cdot s_n) \cdot \sin(n \cdot \beta) \right) : \end{aligned}$$

Que equivale a:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta I} &:= S_0 + \phi_I - \frac{1}{2} \cdot (K \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) + B \cdot \sinh(2 \cdot \alpha)) + (K \cdot \cosh(\alpha) + B \cdot \sinh(\alpha)) \cdot \cos(\beta) \\
&\quad - \frac{K}{2} \cdot \cos(2 \cdot \beta) + \sum_{n=1}^{\infty} (\textcolor{violet}{S}_n \cos(n \beta) + \sin(n \beta) \textcolor{violet}{s}_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot n} \cdot ((\Phi_n(n-1) - 2 \\
&\quad \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Phi_n(n) + \Phi_n(n+1) - 2 \cdot \sinh(\alpha) \cdot \Phi_{En}(n)) \cdot \cos(n \cdot \beta) + (\Psi_n(n-1) - 2 \cdot \Psi_n(n) \\
&\quad \cdot \cosh(\alpha) + \Psi_n(n+1) - 2 \cdot \Psi_{En}(n) \cdot \sinh(\alpha)) \cdot \sin(n \cdot \beta))
\end{aligned}$$

Usando:

(33)

$$\begin{aligned}
\Phi_n &:= (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot \phi_n : \\
\Phi_{n-1} &:= (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot \phi_{n-1} : \\
\Phi_{n+1} &:= n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \phi_{n+1} : \\
\Phi_{En} &:= n \cdot \phi_{linhan} :
\end{aligned}$$

(34)

$$\begin{aligned}
\Psi_n &:= (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot \psi_n : \\
\Psi_{n-1} &:= (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot \psi_{n-1} : \\
\Psi_{n+1} &:= n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \psi_{n+1} : \\
\Psi_{En} &:= n \cdot \psi_{linhan} :
\end{aligned}$$

Aplicados em:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2 \cdot n} \cdot ((\Phi_{n-1} - 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Phi_n + \Phi_{n+1} - 2 \cdot \sinh(\alpha) \cdot \Phi_{En}) \cdot \cos(n \cdot \beta) + (\Psi_{n-1} - 2 \cdot \Psi_n \\
&\quad \cdot \cosh(\alpha) + \Psi_{n+1} - 2 \cdot \Psi_{En} \cdot \sinh(\alpha)) \cdot \sin(n \cdot \beta)) \\
&\frac{1}{2} \frac{1}{n} \left(((n-2) (n-1) n \phi_{n-1} - 2 \cosh(\alpha) (n-1) n (n+1) \phi_n + n (n+1) (n+2) \phi_{n+1} \right. \\
&\quad \left. - 2 \sinh(\alpha) n \phi_{linhan}) \cos(n \beta) + ((n-2) (n-1) n \psi_{n-1} - 2 (n-1) n (n+1) \psi_n \cosh(\alpha) + n (n+1) (n+2) \psi_{n+1} \right. \\
&\quad \left. - 2 n \psi_{linhan} \sinh(\alpha)) \sin(n \beta) \right)
\end{aligned}$$

Resulta:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta I} &:= S_0 + \phi_I - \frac{1}{2} \cdot (K \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) + B \cdot \sinh(2 \cdot \alpha)) + (K \cdot \cosh(\alpha) + B \cdot \sinh(\alpha)) \cdot \cos(\beta) \\
&\quad - \frac{K}{2} \cdot \cos(2 \cdot \beta) + \sum_{n=1}^{\infty} (\textcolor{violet}{S}_n \cos(n \beta) + \sin(n \beta) \textcolor{violet}{s}_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot n} \cdot \left(((n-2)(n-1)n \phi_{n-1} \right. \\
&\quad \left. - 2 \cosh(\alpha)(n-1)n(n+1) \phi_n + n(n+1)(n+2) \phi_{n+1} - 2 \sinh(\alpha)n \psi_{linhan}) \right. \\
&\quad \left. \cos(n \beta) + ((n-2)(n-1)n \psi_{n-1} - 2(n-1)n(n+1) \psi_n \cosh(\alpha) + n(n+1)(n \right. \\
&\quad \left. + 2) \psi_{n+1} - 2n \psi_{linhan} \sinh(\alpha)) \sin(n \beta) \right) :
\end{aligned}$$

Observando o segundo somatório de $n=1 \dots \infty$

$$\begin{aligned}
&\# \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot n} \cdot \left(((n-2)(n-1)n \phi_{n-1} - 2 \cosh(\alpha)(n-1)n(n+1) \phi_n + n(n+1)(n \right. \\
&\quad \left. + 2) \phi_{n+1} - 2 \sinh(\alpha)n \psi_{linhan}) \cos(n \beta) + ((n-2)(n-1)n \psi_{n-1} - 2(n-1)n(n \right. \\
&\quad \left. + 1) \psi_n \cosh(\alpha) + n(n+1)(n+2) \psi_{n+1} - 2n \psi_{linhan} \sinh(\alpha)) \sin(n \beta) \right)
\end{aligned}$$

Pode-se deduzir (ao final deste Anexo) que ele é equivalente a:

$$\begin{aligned}
&- \phi_I + \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\phi_n (\cosh(\alpha) \cos(n \beta) n^2 - \cos(n \beta) \cos(\beta) n^2 - \sin(n \beta) \sin(\beta) n \right. \\
&\quad \left. - \cosh(\alpha) \cos(n \beta)) - \psi_n (\sin(n \beta) \cosh(\alpha) n^2 - \sin(n \beta) \cos(\beta) n^2 \right. \\
&\quad \left. + \cos(n \beta) \sin(\beta) n - \sin(n \beta) \cosh(\alpha)) - \sinh(\alpha) \cos(n \beta) \phi_{linhan} \right. \\
&\quad \left. - \sin(n \beta) \psi_{linhan} \sinh(\alpha) \right)
\end{aligned}$$

O que leva ao cancelamento de ϕ_{linhan} :

(II)

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta I} &:= S_0 - \frac{1}{2} \cdot (K \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) + B \cdot \sinh(2 \cdot \alpha)) + (K \cdot \cosh(\alpha) + B \cdot \sinh(\alpha)) \cdot \cos(\beta) \\
&\quad - \frac{K}{2} \cdot \cos(2 \cdot \beta) + \sum_{n=1}^{\infty} (\textcolor{violet}{S}_n \cos(n \beta) + \sin(n \beta) \textcolor{violet}{s}_n) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\phi_n (\cosh(\alpha) \cos(n \beta) n^2 \right. \\
&\quad \left. - \cos(n \beta) \cos(\beta) n^2 - \sin(n \beta) \sin(\beta) n - \cosh(\alpha) \cos(n \beta)) \right. \\
&\quad \left. - \psi_n (\sin(n \beta) \cosh(\alpha) n^2 - \sin(n \beta) \cos(\beta) n^2 + \cos(n \beta) \sin(\beta) n \right. \\
&\quad \left. - \sin(n \beta) \cosh(\alpha)) - \sinh(\alpha) \cos(n \beta) \phi_{linhan} - \sin(n \beta) \psi_{linhan} \sinh(\alpha) \right) :
\end{aligned}$$

Deste modo, podemos comparar as equações (I) e (II) termo a termo:

(I)

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha 20} := & S_0 - \frac{K}{2} \cdot (\cosh(2 \cdot \alpha) - 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(2 \cdot \beta)) - B \cdot \sinh(\alpha) (\cosh(\alpha) \\ & - \cos(\beta)) + \sum_{n=1}^{\infty} (\textcolor{violet}{S}_n \cdot \cos(n \cdot \beta) + \textcolor{violet}{s}_n \cdot \sin(n \cdot \beta)) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\textcolor{violet}{\phi}_n \cdot (\cosh(\alpha) \cdot \cos(n \cdot \beta) - n^2 \cdot (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) \cdot \cos(n \cdot \beta) + n \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(n \cdot \beta)) + \frac{1}{2} \cdot \textcolor{violet}{\psi}_n \cdot (n^2 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(n \cdot \beta) - (n^2 - 1) \cdot \cosh(\alpha) \cdot \sin(n \cdot \beta) - n \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(n \cdot \beta)) - \textcolor{violet}{\phi}_{linhan} \cdot \sinh(\alpha) \cdot \cos(n \cdot \beta) \right. \\ & \left. - \textcolor{violet}{\psi}_{linhan} \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sin(n \cdot \beta) \right) :\end{aligned}$$

(II)

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha 31} := & S_0 - \frac{1}{2} \cdot (K \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) + B \cdot \sinh(2 \cdot \alpha)) + (K \cdot \cosh(\alpha) + B \cdot \sinh(\alpha)) \cdot \cos(\beta) \\ & - \frac{K}{2} \cdot \cos(2 \cdot \beta) + \sum_{n=1}^{\infty} (\textcolor{violet}{S}_n \cos(n \beta) + \sin(n \beta) \textcolor{violet}{s}_n) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\textcolor{violet}{\phi}_n (\cosh(\alpha) \cos(n \beta) - n^2 \cdot \cos(n \beta) \cos(\beta) - n \cdot \sin(n \beta) \sin(\beta) \cdot \cosh(\alpha) \cos(n \beta)) \right. \\ & \left. - \textcolor{violet}{\psi}_n (\sin(n \beta) \cosh(\alpha) - n^2 \cdot \sin(n \beta) \cos(\beta) + \cos(n \beta) \sin(\beta) \cdot n - \sin(n \beta) \cosh(\alpha)) - \sinh(\alpha) \cos(n \beta) \textcolor{violet}{\phi}_{linhan} - \sin(n \beta) \textcolor{violet}{\psi}_{linhan} \sinh(\alpha) \right) :\end{aligned}$$

Nota-se que ambas são fórmulas com o formato:

$$\sigma_{\alpha} := \text{termo} + \text{termo_soma_1} + \text{termo_soma_2} :$$

Assim:

(i) termos fora dos somatórios

$$\begin{aligned}\text{termo}_I := & S_0 - \frac{K}{2} \cdot (\cosh(2 \cdot \alpha) - 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(2 \cdot \beta)) - B \cdot \sinh(\alpha) (\cosh(\alpha) \\ & - \cos(\beta)) :\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{termo}_II := & S_0 - \frac{1}{2} \cdot (K \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) + B \cdot \sinh(2 \cdot \alpha)) + (K \cdot \cosh(\alpha) + B \cdot \sinh(\alpha)) \cdot \cos(\beta) \\ & - \frac{K}{2} \cdot \cos(2 \cdot \beta) :\end{aligned}$$

$$\text{termo}_I - \text{termo}_II$$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} K (\cosh(2 \alpha) - 2 \cosh(\alpha) \cos(\beta) + \cos(2 \beta)) - B \sinh(\alpha) (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) \\ + \frac{1}{2} K \cosh(2 \alpha) + \frac{1}{2} B \sinh(2 \alpha) - (K \cosh(\alpha) + B \sinh(\alpha)) \cos(\beta) \\ + \frac{1}{2} K \cos(2 \beta)\end{aligned}$$

simplificar

$$-\frac{1}{2} B (2 \cos(\beta) \sinh(\alpha) + 2 \sinh(\alpha) (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) - \sinh(2\alpha))$$

expandir

$$-B \cos(\beta) \sinh(\alpha) - B \sinh(\alpha) (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) + B \sinh(\alpha) \cosh(\alpha)$$

Mas como

$$2 \cos(\beta) \sinh(\alpha) + 2 \sinh(\alpha) \cdot \cosh(\alpha) - \cos(\beta) \cdot 2 \cdot \sinh(\alpha) - \sinh(2\alpha)$$

$$2 \sinh(\alpha) \cosh(\alpha) - \sinh(2\alpha)$$

expandir

$$0$$

Temos que o valor obtido por termo_I - termo_II é igual a zero.

(ii) termo somatório n=1...infinito

$$termo_soma_I_I := S_n \cdot \cos(n \cdot \beta) + s_n \cdot \sin(n \cdot \beta) :$$

$$termo_soma_I_{II} := S_n \cos(n \beta) + \sin(n \beta) s_n :$$

São iguais.

(iii) termos somatório n=2...infinito

$$termo_soma_2_I := \left(\phi_n \cdot (\cosh(\alpha) \cdot \cos(n \cdot \beta) - n^2 \cdot (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) \cdot \cos(n \cdot \beta) + n \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(n \cdot \beta)) + \frac{1}{2} \cdot \psi_n \cdot (n^2 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(n \cdot \beta) - (n^2 - 1) \cdot \cosh(\alpha) \cdot \sin(n \cdot \beta) - n \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(n \cdot \beta)) - \phi_{linhan} \cdot \sinh(\alpha) \cdot \cos(n \cdot \beta) - \psi_{linhan} \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sin(n \cdot \beta) \right) :$$

$$termo_soma_2_{II} := \left(-\phi_n (\cosh(\alpha) \cos(n \beta) n^2 - \cos(n \beta) \cos(\beta) n^2 - \sin(n \beta) \sin(\beta) n - \cosh(\alpha) \cos(n \beta)) - \psi_n (\sin(n \beta) \cosh(\alpha) n^2 - \sin(n \beta) \cos(\beta) n^2 + \cos(n \beta) \sin(\beta) n - \sin(n \beta) \cosh(\alpha)) - \sinh(\alpha) \cos(n \beta) \phi_{linhan} - \sin(n \beta) \psi_{linhan} \sinh(\alpha) \right) :$$

termo_soma_2_I – *termo_soma_2_II*

$$\begin{aligned}
 & \phi_n (\cosh(\alpha) \cos(n\beta) - n^2 (\cosh(\alpha) - \cos(\beta)) \cos(n\beta) + n \sin(\beta) \sin(n\beta)) \\
 & + \frac{1}{2} \psi_n (n^2 \cos(\beta) \sin(n\beta) - (n^2 - 1) \cosh(\alpha) \sin(n\beta) - n \sin(\beta) \cos(n\beta)) \\
 & + \phi_n (\cosh(\alpha) \cos(n\beta) n^2 - \cos(n\beta) \cos(\beta) n^2 - n \sin(\beta) \sin(n\beta) \\
 & - \cosh(\alpha) \cos(n\beta)) + \psi_n (\sin(n\beta) \cosh(\alpha) n^2 - n^2 \cos(\beta) \sin(n\beta) \\
 & + n \sin(\beta) \cos(n\beta) - \sin(n\beta) \cosh(\alpha))
 \end{aligned}$$

simplificar

$$\frac{1}{2} \psi_n (\sin(n\beta) \cosh(\alpha) n^2 - n^2 \cos(\beta) \sin(n\beta) + n \sin(\beta) \cos(n\beta) - \sin(n\beta) \cosh(\alpha))$$

atribuir a um nome →

ERRO

Ou seja, a equação (31) difere da equação (20) por este fator "ERRO" acima, em (iii). Acredita-se que o erro esteja na equação (20), em que um fator 1/2 foi escrito a mais. Suspeita-se pela falta de paralelismo com a função de sigma_beta. Além disso, as deduções das fórmulas seguintes foram baseadas na equação (31) que, tomada como correta, foi aplicada na equação (35) levando a toda a dedução para as condições de contorno. Ou seja, caso faltasse ser multiplicado o fator 1/2 na equação (31), este teria sido notado nas fórmulas subsequentes, o que não foi o caso.

OBS: Dedução para o segundo somatório:

Seu termo interno é:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2 \cdot n} \cdot \left(\left((n-2)(n-1)n \phi_{n-1} - 2 \cosh(\alpha) (n-1)n(n+1) \phi_n + n(n+1)(n+2) \phi_{n+1} \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2 \sinh(\alpha) n \phi_{linhan} \right) \cos(n\beta) + \left((n-2)(n-1)n \psi_{n-1} - 2(n-1)n(n+1) \psi_{n+1} \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2n \psi_{linhan} \sinh(\alpha) \right) \sin(n\beta) \right)
 \end{aligned}$$

simplificar

$$\begin{aligned}
& -\cosh(\alpha) \cos(n\beta) n^2 \phi_n + \frac{1}{2} \cos(n\beta) n^2 \phi_{n+1} + \frac{1}{2} \cos(n\beta) n^2 \phi_{n-1} + \cosh(\alpha) \cos(n\beta) \phi_n \\
& - \sinh(\alpha) \cos(n\beta) \phi_{linhan} + \frac{3}{2} \cos(n\beta) n \phi_{n+1} - \frac{3}{2} \cos(n\beta) n \phi_{n-1} + \cos(n\beta) \phi_{n+1} \\
& + \cos(n\beta) \phi_{n-1} - \sin(n\beta) \cosh(\alpha) n^2 \psi_n + \sin(n\beta) \cosh(\alpha) \psi_n \\
& - \sin(n\beta) \psi_{linhan} \sinh(\alpha) + \frac{1}{2} \sin(n\beta) n^2 \psi_{n+1} + \frac{1}{2} \sin(n\beta) n^2 \psi_{n-1} \\
& + \frac{3}{2} \sin(n\beta) n \psi_{n+1} - \frac{3}{2} \sin(n\beta) n \psi_{n-1} + \sin(n\beta) \psi_{n-1} + \sin(n\beta) \psi_{n+1}
\end{aligned}$$

Termos relacionados a ϕ_n ($n, n-1, n+1$):

$$\begin{aligned}
& -\cosh(\alpha) \cos(n\beta) n^2 \phi_n + \frac{1}{2} \cos(n\beta) n^2 \phi_{n+1} + \frac{1}{2} \cos(n\beta) n^2 \phi_{n-1} + \cosh(\alpha) \cos(n\beta) \phi_n \\
& + \frac{3}{2} \cos(n\beta) n \phi_{n+1} - \frac{3}{2} \cos(n\beta) n \phi_{n-1} + \cos(n\beta) \phi_{n+1} + \cos(n\beta) \phi_{n-1}
\end{aligned}$$

simplificar

$$\begin{aligned}
& - \left((n^2 \phi_n - \phi_n) \cosh(\alpha) + \left(-\frac{1}{2} \phi_{n+1} - \frac{1}{2} \phi_{n-1} \right) n^2 + \left(-\frac{3}{2} \phi_{n+1} + \frac{3}{2} \phi_{n-1} \right) n - \phi_{n+1} \right. \\
& \left. - \phi_{n-1} \right) \cos(n\beta)
\end{aligned}$$

Que é:

$$\# \sum_{n=1}^{\infty} -\cos(n\beta) \cdot \left(\phi_n \cdot (n^2 - 1) \cdot \cosh(\alpha) + \phi_{n+1} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot n^2 - \frac{3}{2} \cdot n - 1 \right) + \phi_{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{3}{2} \cdot n - 1 \right) \right)$$

Que pode ser aberto em três somatórios

$$\begin{aligned}
& \# \sum_{n=1}^{\infty} -\cos(n\beta) \cdot \phi_n \cdot (n^2 - 1) \cdot \cosh(\alpha) \\
& \# \sum_{n=1}^{\infty} -\cos(n\beta) \phi_{n+1} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot n^2 - \frac{3}{2} \cdot n - 1 \right) \rightarrow \text{com } N = n + 1 \rightarrow \sum_{N=2}^{\infty} -\cos((N-1)\beta) \phi_N \\
& \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot (N-1)^2 - \frac{3}{2} \cdot (N-1) - 1 \right) \rightarrow \sum_{N=2}^{\infty} = \sum_{N=1}^{\infty} - \sum_{N=1}^1 \rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \# \rightarrow \text{temos, voltando para "n"} \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} -\cos((n-1)\beta) \phi_n \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot (n-1)^2 - \frac{3}{2} \cdot (n-1) - 1 \right) \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} -\cos((n-1)\beta) \phi_n \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot (n-1)^2 - \frac{3}{2} \cdot (n-1) - 1 \right) - \phi_1
\end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}
& \# \sum_{n=1}^{\infty} -\cos(n \cdot \beta) \phi_{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{3}{2} \cdot n - 1 \right) \rightarrow \text{com } N = n - 1 \rightarrow \sum_{N=0}^{\infty} -\cos((N+1) \cdot \beta) \phi_N \\
& \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot (N+1)^2 + \frac{3}{2} \cdot (N+1) - 1 \right) \rightarrow \sum_{N=0}^{\infty} = \sum_{N=1}^{\infty} + \sum_{N=0}^0 \rightarrow \\
& \# \rightarrow \text{temos, voltando para "n"} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} -\cos((n+1) \cdot \beta) \phi_n \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot (n+1)^2 + \frac{3}{2} \cdot (n+1) - 1 \right) \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} -\cos((n+1) \cdot \beta) \phi_n \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot (n+1)^2 + \frac{3}{2} \cdot (n+1) - 1 \right) + 0
\end{aligned}$$

Portanto, juntando as três somatórias...

Obs:

$$\begin{aligned}
& -\cos(n \cdot \beta) \cdot \phi_n \cdot (n^2 - 1) \cdot \cosh(\alpha) - \cos((n-1) \cdot \beta) \phi_n \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot (n-1)^2 - \frac{3}{2} \cdot (n-1) - 1 \right) \\
& - \cos((n+1) \cdot \beta) \phi_n \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot (n+1)^2 + \frac{3}{2} \cdot (n+1) - 1 \right)
\end{aligned}$$

expandir

$$\begin{aligned}
& -\cosh(\alpha) \cos(n \beta) n^2 \phi_n + \cosh(\alpha) \cos(n \beta) \phi_n + \phi_n \cos(n \beta) \cos(\beta) n^2 \\
& + \phi_n \sin(n \beta) \sin(\beta) n
\end{aligned}$$

simplificar

$$-\phi_n (\cosh(\alpha) \cos(n \beta) n^2 - \cos(n \beta) \cos(\beta) n^2 - \sin(n \beta) \sin(\beta) n - \cosh(\alpha) \cos(n \beta))$$

...obtemos:

$$\begin{aligned}
& \# \sum_{n=1}^{\infty} (-\phi_n (\cosh(\alpha) \cos(n \beta) n^2 - \cos(n \beta) \cos(\beta) n^2 - \sin(n \beta) \sin(\beta) n \\
& - \cosh(\alpha) \cos(n \beta))) - \phi_I
\end{aligned}$$

Analogamente:

Termos relacionados a ψ_n ($n, n-1, n+1$):

$$\begin{aligned}
& -\sin(n \beta) \cosh(\alpha) n^2 \psi_n + \sin(n \beta) \cosh(\alpha) \psi_n + \frac{1}{2} \sin(n \beta) n^2 \psi_{n+1} \\
& + \frac{1}{2} \sin(n \beta) n^2 \psi_{n-1} + \frac{3}{2} \sin(n \beta) n \psi_{n+1} - \frac{3}{2} \sin(n \beta) n \psi_{n-1} + \sin(n \beta) \psi_{n-1} \\
& + \sin(n \cdot \beta) \cdot \psi_{n+1}
\end{aligned}$$

simplificar

$$-\frac{1}{2} \sin(n\beta) \left(2 \cosh(\alpha) n^2 \psi_n - n^2 \psi_{n+1} - n^2 \psi_{n-1} - 2 \cosh(\alpha) \psi_n - 3n \psi_{n+1} + 3n \psi_{n-1} \right. \\ \left. - 2 \psi_{n+1} - 2 \psi_{n-1} \right)$$

Que é

$$\# \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2} \cdot \sin(n\beta) \cdot \left(\psi_n \cdot (2 \cosh(\alpha) n^2 - 2 \cosh(\alpha)) + \psi_{n-1} \cdot (-n^2 + 3n - 2) + \psi_{n+1} \cdot (-n^2 - 3n - 2) \right)$$

Que pode ser aberto em três somatórios

$$\# \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2} \cdot \sin(n\beta) \cdot \psi_n \cdot (2 \cosh(\alpha) n^2 - 2 \cosh(\alpha)) \\ \# \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2} \cdot \sin(n\beta) \cdot \psi_{n+1} \cdot (-n^2 - 3n - 2) \rightarrow \text{com } N = n+1 \rightarrow \sum_{N=2}^{\infty} -\frac{1}{2} \cdot \sin((N-1)\beta) \\ \cdot \psi_N \cdot (- (N-1)^2 - 3 \cdot (N-1) - 2) \rightarrow \sum_{N=2}^{\infty} = \sum_{N=1}^{\infty} - \sum_{N=1}^1 \rightarrow$$

$$\# \rightarrow \text{temos, voltando para "n"} \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} -\frac{1}{2} \cdot \sin((n-1)\beta) \cdot \psi_n \cdot (- (n-1)^2 - 3 \cdot (n-1) - 2) \\ = \sum_{N=1}^{\infty} -\frac{1}{2} \cdot \sin((n-1)\beta) \cdot \psi_n \cdot (- (n-1)^2 - 3 \cdot (n-1) - 2) - 0$$

Analogamente:

$$\# \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2} \cdot \sin(n\beta) \cdot \psi_{n-1} \cdot (-n^2 + 3n - 2) \rightarrow \text{com } N = n-1 \rightarrow \sum_{N=0}^{\infty} -\frac{1}{2} \cdot \sin((N+1)\beta) \\ \cdot \psi_N \cdot (- (N+1)^2 + 3 \cdot (N+1) - 2) \rightarrow \sum_{N=0}^{\infty} = \sum_{N=1}^{\infty} + \sum_{N=0}^0 \rightarrow$$

$$\# \rightarrow \text{temos, voltando para "n"} \rightarrow \sum_{N=0}^{\infty} -\frac{1}{2} \cdot \sin((N+1)\beta) \cdot \psi_N \cdot (- (N+1)^2 + 3 \cdot (N+1) - 2) \\ - 2 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2} \cdot \sin((n+1)\beta) \cdot \psi_n \cdot (- (n+1)^2 + 3 \cdot (n+1) - 2) + 0$$

Portanto, juntando as três somatórias...

Obs:

$$-\frac{1}{2} \cdot \sin(n \cdot \beta) \cdot \psi_n \cdot (2 \cosh(\alpha) n^2 - 2 \cosh(\alpha)) - \frac{1}{2} \cdot \sin((n-1) \cdot \beta) \cdot \psi_n \cdot (-n^2 - 3 \cdot (n-1) - 2) - \frac{1}{2} \cdot \sin((n+1) \cdot \beta) \cdot \psi_n \cdot (-n^2 + 3 \cdot (n+1) - 2)$$

expandir

$$-\sin(n \beta) \cosh(\alpha) n^2 \psi_n + \sin(n \beta) \cosh(\alpha) \psi_n + \psi_n \sin(n \beta) \cos(\beta) n^2 - \psi_n \cos(n \beta) \sin(\beta) n$$

simplificar

$$-\psi_n (\sin(n \beta) \cosh(\alpha) n^2 - \sin(n \beta) \cos(\beta) n^2 + \cos(n \beta) \sin(\beta) n - \sin(n \beta) \cosh(\alpha))$$

...obtemos:

$$\# \sum_{n=2}^{\infty} (-\psi_n (\sin(n \beta) \cosh(\alpha) n^2 - \sin(n \beta) \cos(\beta) n^2 + \cos(n \beta) \sin(\beta) n - \sin(n \beta) \cosh(\alpha)))$$

Assim, teremos que:

$$\# \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot n} \cdot (((n-2) (n-1) n \phi_{n-1} - 2 \cosh(\alpha) (n-1) n (n+1) \phi_n + n (n+1) (n+2) \phi_{n+1} - 2 \sinh(\alpha) n \psi_{linhan}) \cos(n \beta) + ((n-2) (n-1) n \psi_{n-1} - 2 (n-1) n (n+1) \psi_n \cosh(\alpha) + n (n+1) (n+2) \psi_{n+1} - 2 n \psi_{linhan} \sinh(\alpha)) \sin(n \beta)) \rightarrow$$

$$\# \rightarrow -\phi_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-\phi_n (\cosh(\alpha) \cos(n \beta) n^2 - \cos(n \beta) \cos(\beta) n^2 - \sin(n \beta) \sin(\beta) n - \cosh(\alpha) \cos(n \beta)) - \psi_n (\sin(n \beta) \cosh(\alpha) n^2 - \sin(n \beta) \cos(\beta) n^2 + \cos(n \beta) \sin(\beta) n - \sin(n \beta) \cosh(\alpha)) - \sinh(\alpha) \cos(n \beta) \phi_{linhan} - \sin(n \beta) \psi_{linhan} \sinh(\alpha))$$

7.8 Anexo 8 – Dedução das fórmulas das eqs.(31) a (35)

[numeração de fórmulas conforme Radi (2011)]

(37) e (38)-----

(31)

$$\begin{aligned} \# \sigma_{\alpha} &= S_0 + \phi_I - \frac{1}{2} \cdot (K \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) + B \cdot \sinh(2 \cdot \alpha)) + (K \cdot \cosh(\alpha) + B \cdot \sinh(\alpha)) \cdot \cos(\beta) \\ &\quad - \frac{K}{2} \cdot \cos(2 \cdot \beta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot n} \cdot ((\Phi_{n-1} - 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Phi_n + \Phi_{n+1} - 2 \cdot \sinh(\alpha) \cdot \Phi_{En} + 2 \cdot n \\ &\quad \cdot S_n) \cdot \cos(n \cdot \beta) + (\Psi_{n-1} - 2 \cdot \Psi_n \cdot \cosh(\alpha) + \Psi_{n+1} - 2 \cdot \Psi_{En} \cdot \sinh(\alpha) + 2 \cdot n \cdot S_n) \cdot \sin(n \\ &\quad \cdot \beta)) \end{aligned}$$

(32) (corrigida tirando o n que multiplicava o T_n):

$$\begin{aligned} \tau_{\beta\alpha} &= t_0 + \frac{1}{2} \cdot \Psi_{linha1} - (K \cdot \sinh(\alpha) + B \cdot \cosh(\alpha)) \cdot \sin(\beta) + \frac{B}{2} \cdot \sin(2 \cdot \beta) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} ((\\ &\quad - \Phi_{En-1} + 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Phi_{En} - \Phi_{En+1} + 2 \cdot T_n) \cdot \sin(n \cdot \beta) + (\Psi_{En-1} - 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Psi_{En} \\ &\quad + \Psi_{En+1} + 2 \cdot t_n) \cdot \cos(n \cdot \beta)) : \end{aligned} \quad (36)$$

(36) para alpha=alpha_1 e alpha=alpha_2:

para alpha=alpha_1 e alpha=alpha_2:

$$\# \sigma_{\alpha} = -p(\alpha)$$

$$\# \tau_{\beta\alpha} = 0 :$$

Com

(27)

$$S_0 := e^{-|\alpha|} \cdot (\sigma_{11}^{\infty} \cdot \cosh(\alpha) + \sigma_{22}^{\infty} \cdot \sinh(|\alpha|)) :$$

$$t_0 := -\tau_{12}^{\infty} \cdot e^{-2 \cdot |\alpha|} :$$

Os termos com cos e sin n*beta devem desaparecer. Assim, pegando apenas os termos constantes, para n=0:

de (31):

$$\begin{aligned} \# -p(\alpha) &= S_0 + \phi_I - \frac{1}{2} \cdot (K \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) + B \cdot \sinh(2 \cdot \alpha)) \rightarrow e^{-|\alpha|} \cdot (\sigma_{11}^{\infty} \cdot \cosh(\alpha) + \sigma_{22}^{\infty} \\ &\quad \cdot \sinh(|\alpha|)) + \phi_I - \frac{1}{2} \cdot (K \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) + B \cdot \sinh(2 \cdot \alpha)) \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \# \phi_I &= \frac{1}{2} \cdot (K \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) + B \cdot \sinh(2 \cdot \alpha)) - e^{-|\alpha|} \cdot (\sigma_{11}^{\infty} \cdot \cosh(\alpha) + \sigma_{22}^{\infty} \cdot \sinh(|\alpha|)) \\ &\quad - p(\alpha) \end{aligned}$$

Que é a equação (37)

E, de (32):

$$\# 0 = t_0 + \frac{1}{2} \cdot \Psi_{linha1} \rightarrow \Psi_{linha1} = 2 \cdot t_0 = -2 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot e^{-2 \cdot |\alpha|}$$

Nota-se que foi escrito Psi e não psi no paper. Erro de digitação.

(39)-----

Requere "sumir" com os termos que contenham sin e cos n*beta:
de (31):

Cancelando os termos multiplicativos de cos n*beta:

$$\# 0 = (K \cdot \cosh(\alpha) + B \cdot \sinh(\alpha)) \cdot \cos(\beta) - \frac{K}{2} \cdot \cos(2 \cdot \beta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot n} \cdot ((\Phi_{n-1} - 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Phi_n + \Phi_{n+1} - 2 \cdot \sinh(\alpha) \cdot \Phi_{En} + 2 \cdot n \cdot S_n) \cdot \cos(n \cdot \beta))$$

Obs: $\# \delta_{nA}$ (vale 1 quando $n = A$; em todos os outros, vale zero)

$$\# \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot n} \cdot \left((\Phi_{n-1} - 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Phi_n + \Phi_{n+1} - 2 \cdot \sinh(\alpha) \cdot \Phi_{En} + 2 \cdot n \cdot S_n + 2 \cdot n \cdot (K \cdot \cosh(\alpha) + B \cdot \sinh(\alpha)) \cdot \delta_{n1} - \frac{2 \cdot n \cdot K}{2} \cdot \delta_{n2}) \cdot \cos(n \cdot \beta) \right) = 0$$

Mas como o delta_n1 só existirá em $n=1$, e delta_n2 só em $n=2$, podemos observar o interior do somatório:

$$\# \Phi_{n-1} - 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Phi_n + \Phi_{n+1} - 2 \cdot \sinh(\alpha) \cdot \Phi_{En} + 2 \cdot n \cdot S_n + 2 \cdot (K \cdot \cosh(\alpha) + B \cdot \sinh(\alpha)) \cdot \delta_{n1} - 2 \cdot K \cdot \delta_{n2} = 0$$

Que é a equação (39).

(40)-----

Analogamente, de (31), sumir com sin n*beta:

$$\# (\Psi_{n-1} - 2 \cdot \Psi_n \cdot \cosh(\alpha) + \Psi_{n+1} - 2 \cdot \Psi_{En} \cdot \sinh(\alpha) + 2 \cdot n \cdot S_n) \cdot \sin(n \cdot \beta) = 0 \rightarrow \Psi_{n-1} - 2 \cdot \Psi_n \cdot \cosh(\alpha) + \Psi_{n+1} - 2 \cdot \Psi_{En} \cdot \sinh(\alpha) + 2 \cdot n \cdot S_n = 0$$

Que é a (40).

(41)-----

Analogamente, de (32), sumir com sin n*beta:

$$\# -(K \cdot \sinh(\alpha) + B \cdot \cosh(\alpha)) \cdot \sin(\beta) + \frac{B}{2} \cdot \sin(2 \cdot \beta) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} ((-\Phi_{En-1} + 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Phi_{En} - \Phi_{En+1} + 2 \cdot T_n) \cdot \sin(n \cdot \beta)) = 0 \rightarrow$$

$$\# \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} ((-\Phi_{En-1} + 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Phi_{En} - \Phi_{En+1} + 2 \cdot T_n) - 2 \cdot (K \cdot \sinh(\alpha) + B \cdot \cosh(\alpha)) \cdot \delta_{n1} + \frac{2 \cdot B}{2} \cdot \delta_{n2}) \cdot \sin(n \cdot \beta) = 0$$

Podemos observar o interior do somatório:

$$\# -\Phi_{En-1} + 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Phi_{En} - \Phi_{En+1} + 2 \cdot T_n - 2 \cdot (K \cdot \sinh(\alpha) + B \cdot \cosh(\alpha)) \cdot \delta_{n1} + B \cdot \delta_{n2} = 0$$

Que é a fórmula (41)

(42)-----

Analogamente, de (32), sumir com cos n*beta:

$$\# \Psi_{En-1} - 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Psi_{En} + \Psi_{En+1} + 2 \cdot t_n = 0$$

Que é a (42).

(43)-----

Fazendo a seguinte operação com a equação (41):

$$\begin{aligned} \# \sum_{n=1}^{\infty} \{ (41) \cdot e^{-n \cdot |\alpha|} \} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left((-\Phi_{En-1} + 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Phi_{En} - \Phi_{En+1} + 2 \cdot T_n - 2 \cdot (K \cdot \sinh(\alpha) \right. \right. \\ \left. \left. + B \cdot \cosh(\alpha) \right) \cdot \delta_{n1} + B \cdot \delta_{n2} \right) \cdot e^{-n \cdot |\alpha|} = 0 \rightarrow \end{aligned}$$

Retirando os termos de n=1 e n=2 (com os deltas):

$$\begin{aligned} \# \sum_{n=1}^{\infty} \left((-\Phi_{En-1} + 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Phi_{En} - \Phi_{En+1}) \cdot e^{-n \cdot |\alpha|} \right) - 2 \cdot (K \cdot \sinh(\alpha) + B \cdot \cosh(\alpha)) \\ \cdot e^{-|\alpha|} + B \cdot e^{-2 \cdot |\alpha|} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot T_n \cdot e^{-n \cdot |\alpha|} = 0 \end{aligned}$$

Utilizando a equação (28):

(28)

$$S_n := 2 \cdot \left(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} \right) \cdot g_n \cdot \sinh(|\alpha|) :$$

$$T_n := 2 \cdot \left(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} \right) \cdot g_n \cdot \sinh(\alpha) :$$

$$\begin{aligned} \# \sum_{n=1}^{\infty} \left((-\Phi_{En-1} + 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Phi_{En} - \Phi_{En+1}) \cdot e^{-n \cdot |\alpha|} \right) - 2 \cdot (K \cdot \sinh(\alpha) + B \cdot \cosh(\alpha)) \\ \cdot e^{-|\alpha|} + B \cdot e^{-2 \cdot |\alpha|} + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot \left(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} \right) \cdot g_n \cdot \sinh(\alpha) \cdot e^{-n \cdot |\alpha|} = 0 \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \# \sum_{n=1}^{\infty} \left((2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Phi_{En} - \Phi_{En-1} - \Phi_{En+1}) \cdot e^{-n \cdot |\alpha|} \right) - 2 \cdot K \cdot \sinh(\alpha) \cdot e^{-|\alpha|} - 2 \cdot B \cdot \cosh(\alpha) \\ \cdot e^{-|\alpha|} + B \cdot e^{-2 \cdot |\alpha|} + 4 \cdot \left(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} \right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cdot \sinh(\alpha) \cdot e^{-n \cdot |\alpha|} = 0 \rightarrow \end{aligned}$$

Obs:

$$B \cdot (-2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot e^{-|\alpha|} + e^{-2 \cdot |\alpha|}) :$$

$$B \cdot \left(-\frac{2 \cdot (e^{|\alpha|} + e^{-|\alpha|})}{2} \cdot e^{-|\alpha|} + e^{-2 \cdot |\alpha|} \right)$$

$$B \left(-\frac{1}{2} (2 e^{|\alpha|} + 2 e^{-|\alpha|}) e^{-|\alpha|} + e^{-2 \cdot |\alpha|} \right)$$

simplificar

$$-B$$

Então:

$$\# \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left((2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Phi_{En} - \Phi_{En-1} - \Phi_{En+1}) \cdot e^{-n \cdot |\alpha|} \right) - 2 \cdot K \cdot \sinh(\alpha) \cdot e^{-|\alpha|} - B + 4 \\ \cdot \left(\sigma^{\infty}_{22} - \sigma^{\infty}_{11} \right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cdot \sinh(\alpha) \cdot e^{-n \cdot |\alpha|} = 0$$

E, olhando apenas para o primeiro somatório:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left((e^{|\alpha|} + e^{-|\alpha|}) \cdot \Phi_{En} - \Phi_{En-1} - \Phi_{En+1} \right) \cdot e^{-n \cdot |\alpha|} \right) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{(1-n) \cdot |\alpha|} \cdot \Phi_{En} + e^{-(1+n) \cdot |\alpha|} \cdot \Phi_{En-1} \cdot e^{-n \cdot |\alpha|} - \Phi_{En+1} \cdot e^{-n \cdot |\alpha|} \right)$$

Pode ser aberto em outras somatórias:

$$\# (i) \sum_{n=1}^{\infty} + \Phi_{En} \cdot e^{(1-n) \cdot |\alpha|} \\ \# (ii) \sum_{n=1}^{\infty} + \Phi_{En} \cdot e^{-(1+n) \cdot |\alpha|} \\ \# (iii) \sum_{n=1}^{\infty} - \Phi_{En-1} \cdot e^{-n \cdot |\alpha|} \rightarrow \text{com } N = n-1 \rightarrow \sum_{N=0}^{\infty} - \Phi_N \cdot e^{-(N+1) \cdot |\alpha|} \rightarrow \sum_{N=0}^{\infty} = \sum_{N=1}^{\infty} + \sum_{N=0}^0 \\ \rightarrow \sum_{N=0}^{\infty} - \Phi_N \cdot e^{-(N+1) \cdot |\alpha|} = \sum_{N=0}^{\infty} - \Phi_N \cdot e^{-(N+1) \cdot |\alpha|} - \Phi_0 \rightarrow \text{mas } \Phi_0 = 0 \rightarrow \\ \# \rightarrow \text{usando "n"} \rightarrow (iii) = \sum_{n=1}^{\infty} - \Phi_{En} \cdot e^{-(n+1) \cdot |\alpha|} \\ \# (iv) \sum_{n=1}^{\infty} - \Phi_{En+1} \cdot e^{-n \cdot |\alpha|} \rightarrow \text{com } N = n+1 \rightarrow \sum_{N=2}^{\infty} - \Phi_{EN} \cdot e^{-(N-1) \cdot |\alpha|} \rightarrow \sum_{N=2}^{\infty} = \sum_{N=1}^{\infty} - \sum_{N=1}^1 \\ \rightarrow \sum_{N=2}^{\infty} - \Phi_{EN} \cdot e^{-(N-1) \cdot |\alpha|} = \sum_{N=2}^{\infty} - \Phi_{EN} \cdot e^{-(N-1) \cdot |\alpha|} + \Phi_{El} \rightarrow \\ \# \rightarrow \text{usando "n"} \rightarrow (iv) = \sum_{n=2}^{\infty} - \Phi_{En} \cdot e^{(-n+1) \cdot |\alpha|} + \Phi_{El}$$

Assim, somando todas os somatórios:

$$\# \sum_{n=1}^{\infty} \left(+ \Phi_{En} \cdot e^{(1-n) \cdot |\alpha|} + \Phi_{En} \cdot e^{-(1+n) \cdot |\alpha|} - \Phi_{En} \cdot e^{-(n+1) \cdot |\alpha|} - \Phi_{En} \cdot e^{(-n+1) \cdot |\alpha|} \right) + \Phi_{El} \\ = \Phi_{El}$$

Portanto,

$$\Phi_{El} = 2 \cdot K \cdot \sinh(\alpha) \cdot e^{-|\alpha|} + B - 4 \cdot \left(\sigma^{\infty}_{22} - \sigma^{\infty}_{11} \right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cdot \sinh(\alpha) \cdot e^{-n \cdot |\alpha|}$$

Que é a (43).

(44)-----

Para $m \geq 2$, fazendo:

$$\sum_{n=1}^{m-1} \{(41) \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha)\} = 0$$

Temos:

$$\# \sum_{n=1}^{m-1} \left\{ \left(+ 2 \cdot \mathcal{T}_n - 2 \cdot (K \cdot \sinh(\alpha) + B \cdot \cosh(\alpha)) \cdot \delta_{n1} + B \cdot \delta_{n2} - \Phi_{En-1} + 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Phi_{En} - \Phi_{En+1} \right) \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \right\} = 0$$

Analizando por partes o somatório:

(a)

$$\# \sum_{n=1}^{m-1} \left\{ \left(+ 2 \cdot \mathcal{T}_n \right) \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \right\}$$

(28) Utilizando:

$$\mathcal{T}_n = 2 \cdot \left(\sigma^{\infty}_{22} - \sigma^{\infty}_{11} \right) \cdot \mathcal{g}_n \cdot \sinh(\alpha) :$$

Obtemos:

$$\# \sum_{n=1}^{m-1} \left\{ \left(+ 2 \cdot 2 \cdot \left(\sigma^{\infty}_{22} - \sigma^{\infty}_{11} \right) \cdot \mathcal{g}_n \cdot \sinh(\alpha) \right) \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \right\} = + 4 \cdot \left(\sigma^{\infty}_{22} - \sigma^{\infty}_{11} \right) \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sum_{n=1}^{m-1} \left\{ \mathcal{g}_n \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \right\}$$

Assim:

$$(a) \rightarrow + 4 \cdot \left(\sigma^{\infty}_{22} - \sigma^{\infty}_{11} \right) \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sum_{n=1}^{m-1} \left\{ \mathcal{g}_n \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \right\}$$

(b)

$$\# \sum_{n=1}^{m-1} \left\{ \left(-2 \cdot (K \cdot \sinh(\alpha) + B \cdot \cosh(\alpha)) \cdot \delta_{n1} + B \cdot \delta_{n2} \right) \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \right\} \rightarrow$$

Só haverá valores para $n=1$ e $n=2$. Assim:

$$\begin{aligned} & -2 \cdot (K \cdot \sinh(\alpha) + B \cdot \cosh(\alpha)) \cdot \sinh((m-1) \cdot \alpha) + B \cdot \sinh((m-2) \cdot \alpha) \\ & -2 (K \sinh(\alpha) + B \cosh(\alpha)) \sinh((m-1) \alpha) + B \sinh((m-2) \alpha) \end{aligned}$$

expandir

$$-2 K \sinh(\alpha) \sinh(\alpha m) \cosh(\alpha) + 2 K \sinh(\alpha)^2 \cosh(\alpha m) - B \sinh(\alpha m)$$

simplificar

$$-2 K \sinh(\alpha) \sinh(\alpha m) \cosh(\alpha) + 2 K \cosh(\alpha)^2 \cosh(\alpha m) - B \sinh(\alpha m) - 2 K \cosh(\alpha m)$$

Mas

$$sha := \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} :$$

$$cha := \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} :$$

$$shma := \frac{e^{m \cdot \alpha} - e^{-m \cdot \alpha}}{2} :$$

$$chma := \frac{e^{m \cdot \alpha} + e^{-m \cdot \alpha}}{2} :$$

$$-2 \cdot K \cdot sha \cdot shma \cdot cha + 2 \cdot K \cdot cha^2 \cdot chma - B \cdot shma - 2 \cdot K \cdot chma$$

$$2 \cdot K \left(\frac{1}{2} e^{\alpha} + \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right)^2 \left(\frac{1}{2} e^{\alpha \cdot m} + \frac{1}{2} e^{-\alpha \cdot m} \right) - 2 \cdot K \left(\frac{1}{2} e^{\alpha} + \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) \left(\frac{1}{2} e^{\alpha} + \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) \left(\frac{1}{2} e^{\alpha \cdot m} - \frac{1}{2} e^{-\alpha \cdot m} \right) - B \left(\frac{1}{2} e^{\alpha \cdot m} - \frac{1}{2} e^{-\alpha \cdot m} \right) - 2 \cdot K \left(\frac{1}{2} e^{\alpha \cdot m} + \frac{1}{2} e^{-\alpha \cdot m} \right)$$

expandir

$$\frac{1}{2} \frac{K (e^{\alpha})^2}{e^{\alpha \cdot m}} - \frac{1}{2} K e^{\alpha \cdot m} - \frac{1}{2} \frac{K}{e^{\alpha \cdot m}} + \frac{1}{2} \frac{K e^{\alpha \cdot m}}{(e^{\alpha})^2} - \frac{1}{2} B e^{\alpha \cdot m} + \frac{1}{2} \frac{B}{e^{\alpha \cdot m}}$$

simplificar

$$\frac{1}{2} K e^{-(m-2) \cdot \alpha} - \frac{1}{2} K e^{\alpha \cdot m} - \frac{1}{2} K e^{-\alpha \cdot m} + \frac{1}{2} K e^{(m-2) \cdot \alpha} - \frac{1}{2} B e^{\alpha \cdot m} + \frac{1}{2} B e^{-\alpha \cdot m}$$

Fazendo:

$$\# \frac{1}{2} K e^{-(m-2) \cdot \alpha} + \frac{1}{2} K e^{(m-2) \cdot \alpha} = K \cdot \left(\frac{e^{(m-2) \cdot \alpha} + e^{-(m-2) \cdot \alpha}}{2} \right) = K \cdot \cosh((m-2) \cdot \alpha)$$

$$\# -\frac{1}{2} K e^{\alpha \cdot m} - \frac{1}{2} K e^{-\alpha \cdot m} = -K \cdot \left(\frac{e^{\alpha \cdot m} + e^{-\alpha \cdot m}}{2} \right) = -K \cdot \cosh(m \cdot \alpha)$$

$$\# -\frac{1}{2} B e^{\alpha \cdot m} + \frac{1}{2} B e^{-\alpha \cdot m} = -B \cdot \left(\frac{e^{\alpha \cdot m} - e^{-\alpha \cdot m}}{2} \right) = -B \cdot \sinh(m \cdot \alpha)$$

Temos:

$$(b) \rightarrow K \cdot (\cosh((m-2) \cdot \alpha) - \cosh(m \cdot \alpha)) - B \cdot \sinh(m \cdot \alpha)$$

(c)

$$\# \sum_{n=1}^{m-1} \left\{ \left(-\Phi_{En-1} + 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Phi_{En} - \Phi_{En+1} \right) \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \right\}$$

Que deve ser aberto em três somatórios:

(i)

$$\sum_{n=1}^{m-1} \left\{ \left(-\Phi_{En-1} \right) \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \right\} \rightarrow \text{com } N = n-1 \rightarrow \sum_{N=0}^{m-2} \left\{ \left(-\Phi_{EN} \right) \cdot \sinh((m-N-1)) \cdot \alpha \right\} \rightarrow$$

$$\# \rightarrow \sum_{N=0}^{m-2} = \sum_{N=1}^{m-1} + \sum_{N=0}^0 - \sum_{N=m-1}^{m-1} \rightarrow \text{mas como}$$

$$-\Phi_{E0} \cdot \sinh((m-1) \cdot \alpha) \rightarrow \text{mas como } \Phi_{E0} = 0 \rightarrow 0$$

e

$$-\Phi_{Em-1} \cdot \sinh((m-m+1-1) \cdot \alpha) = -\Phi_{Em-1} \cdot \sinh(0) = 0$$

Temos que, reescrevendo com "n":

$$\sum_{n=0}^{m-2} \left\{ (-\Phi_{En}) \cdot \sinh((m-n-1) \cdot \alpha) \right\} = \sum_{n=1}^{m-1} \left\{ (-\Phi_{En}) \cdot \sinh((m-n-1) \cdot \alpha) \right\}$$

Assim:

$$(i) \rightarrow \sum_{n=1}^{m-1} \left\{ (-\Phi_{En}) \cdot \sinh((m-n-1) \cdot \alpha) \right\}$$

$$(ii) \# \sum_{n=1}^{m-1} \left\{ (+2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Phi_{En}) \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \right\}$$

(iii)

$$\# \sum_{n=1}^{m-1} \left\{ (-\Phi_{En+1}) \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \right\} \rightarrow \text{com } N = n+1 \rightarrow \sum_{N=2}^m \left\{ (-\Phi_{EN}) \cdot \sinh((m-N+1) \cdot \alpha) \right\} \rightarrow$$

$$\# \rightarrow \sum_{N=2}^m = \sum_{N=1}^{m-1} + \sum_{N=m}^m - \sum_{N=1}^1 \rightarrow \text{mas como}$$

$$-\Phi_{Em} \cdot \sinh((m-m+1) \cdot \alpha) = -\Phi_{Em} \cdot \sinh(\alpha)$$

e

$$-\Phi_{EI} \cdot \sinh((m-1+1) \cdot \alpha) = -\Phi_{EI} \cdot \sinh(m \cdot \alpha)$$

Temos que, reescrevendo com "n":

$$\# \sum_{n=2}^m \left\{ (-\Phi_{En}) \cdot \sinh((m-n+1) \cdot \alpha) \right\} = \sum_{n=1}^m \left\{ (-\Phi_{En}) \cdot \sinh((m-n+1) \cdot \alpha) \right\} - \Phi_{Em} \cdot \sinh(\alpha) + \Phi_{EI} \cdot \sinh(m \cdot \alpha)$$

Assim:

$$(iii) \rightarrow \sum_{n=1}^m \left\{ (-\Phi_{En}) \cdot \sinh((m-n+1) \cdot \alpha) \right\} - \Phi_{Em} \cdot \sinh(\alpha) + \Phi_{EI} \cdot \sinh(m \cdot \alpha)$$

E, portanto, como (c)=(i)+(ii)+(iii), temos:

$$\sum_{n=1}^{m-1} \left((-\Phi_{En}) \cdot \sinh((m-n-1) \cdot \alpha) + 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Phi_{En} \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) - \Phi_{En} \cdot \sinh((m-n+1) \cdot \alpha) \right) - \Phi_{Em} \cdot \sinh(\alpha) + \Phi_{EI} \cdot \sinh(m \cdot \alpha)$$

Mas como:

$$-\Phi_{En} \cdot \sinh((m-n-1) \cdot \alpha) + 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Phi_{En} \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) - \Phi_{En} \cdot \sinh((m-n+1) \cdot \alpha)$$

$$-\Phi_{En} \sinh((m-n-1) \alpha) + 2 \cosh(\alpha) \Phi_{En} \sinh((m-n) \alpha) - \Phi_{En} \sinh((m-n+1) \alpha)$$

expandir

$$0$$

Temos que

$$(c) \rightarrow -\Phi_{Em} \cdot \sinh(\alpha) + \Phi_{EI} \cdot \sinh(m \cdot \alpha)$$

Portanto, somando as três parcelas (a)+(b)+(c), temos:

$$+ 4 \cdot \left(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} \right) \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sum_{n=1}^{m-1} \left\{ g_n \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \right\} + K \cdot (\cosh((m-2) \cdot \alpha) - \cosh(m \cdot \alpha)) - B \cdot \sinh(m \cdot \alpha) - \Phi_{Em} \cdot \sinh(\alpha) + \Phi_{EI} \cdot \sinh(m \cdot \alpha) \quad E,$$

E, como

como

(43)

$$\Phi_{EI} := 2 \cdot K \cdot e^{-|\alpha|} \cdot \sinh(\alpha) + B - 4 \cdot \left(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} \right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cdot e^{-n \cdot |\alpha|} \cdot \sinh(\alpha) :$$

Temos, finalmente:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{m-1} \left\{ (41) \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \right\} \rightarrow \\ & + 4 \cdot \left(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} \right) \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sum_{n=1}^{m-1} \left\{ g_n \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \right\} + K \cdot (\cosh((m-2) \cdot \alpha) - \cosh(m \cdot \alpha)) - B \cdot \sinh(m \cdot \alpha) - \Phi_{Em} \cdot \sinh(\alpha) + \left(2 \cdot K \cdot e^{-|\alpha|} \cdot \sinh(\alpha) + B - 4 \cdot \left(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} \right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cdot e^{-n \cdot |\alpha|} \cdot \sinh(\alpha) \right) \cdot \sinh(m \cdot \alpha) \rightarrow \\ & + 4 \cdot \left(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} \right) \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sum_{n=1}^{m-1} \left\{ g_n \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \right\} + K \cdot (\cosh((m-2) \cdot \alpha) - \cosh(m \cdot \alpha)) - B \cdot \sinh(m \cdot \alpha) - \Phi_{Em} \cdot \sinh(\alpha) + 2 \cdot K \cdot e^{-|\alpha|} \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sinh(m \cdot \alpha) + B \cdot \sinh(m \cdot \alpha) - 4 \cdot \left(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} \right) \cdot \sinh(m \cdot \alpha) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cdot e^{-n \cdot |\alpha|} \cdot \sinh(\alpha) = 0 \rightarrow \\ & + 4 \cdot \left(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} \right) \cdot \sinh(\alpha) \cdot \left(-\sinh(m \cdot \alpha) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cdot e^{-n \cdot |\alpha|} + \sum_{n=1}^{m-1} g_n \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \right) + K \cdot (\cosh((m-2) \cdot \alpha) - \cosh(m \cdot \alpha)) - B \cdot \sinh(m \cdot \alpha) - \Phi_{Em} \cdot \sinh(\alpha) + 2 \cdot K \cdot e^{-|\alpha|} \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sinh(m \cdot \alpha) + B \cdot \sinh(m \cdot \alpha) = 0 \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& K \left(2 e^{-|\alpha|} \sinh(\alpha) \sinh(\alpha m) - \cosh(\alpha m) + \cosh((m-2)\alpha) \right) + 4 \cdot \left(\sigma^{\infty}_{22} - \sigma^{\infty}_{11} \right) \\
& \cdot \sinh(\alpha) \cdot \left(-\sinh(m \cdot \alpha) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cdot e^{-n \cdot |\alpha|} + \sum_{n=1}^{m-1} g_n \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \right) - \Phi_{Em} \cdot \sinh(\alpha) = 0 \\
& \rightarrow
\end{aligned}$$

Após manipulação algébrica dos termos multiplicativos de K (na **Obs.** em breve), temos:

$$\begin{aligned}
& \sinh(\alpha) \cdot 2 \cdot K \cdot e^{-m \cdot |\alpha|} \cdot \sinh(\alpha) + 4 \cdot \left(\sigma^{\infty}_{22} - \sigma^{\infty}_{11} \right) \cdot \sinh(\alpha) \cdot \left(-\sinh(m \cdot \alpha) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cdot e^{-n \cdot |\alpha|} \right. \\
& \left. + \sum_{n=1}^{m-1} g_n \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \right) - \Phi_{Em} \cdot \sinh(\alpha) = 0 \rightarrow \\
& 2 \cdot K \cdot e^{-m \cdot |\alpha|} \cdot \sinh(\alpha) + 4 \cdot \left(\sigma^{\infty}_{22} - \sigma^{\infty}_{11} \right) \cdot \left(-\sinh(m \cdot \alpha) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cdot e^{-n \cdot |\alpha|} + \sum_{n=1}^{m-1} g_n \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \right) = \Phi_{Em}
\end{aligned}$$

Que é a fórmula (44).

Obs.: Dedução do termo multiplicativo de K

Olhando apenas os termos multiplicativos de K:

$$2 e^{-|\alpha|} \sinh(\alpha) \sinh(\alpha m) - \cosh(\alpha m) + \cosh((m-2)\alpha)$$

Mas como:

$$\begin{aligned}
& -\cosh(\alpha m) + \cosh((m-2)\alpha) \\
& \quad \cosh((m-2)\alpha) - \cosh(\alpha m)
\end{aligned}$$

expandir

$$2 \cosh(\alpha m) \cosh(\alpha)^2 - 2 \cosh(\alpha m) - 2 \sinh(\alpha m) \sinh(\alpha) \cosh(\alpha)$$

E, abrindo o $\cosh^2(\alpha)$:

$$2 \cosh(\alpha \cdot m) \cdot (1 + \sinh(\alpha)^2) - 2 \cosh(\alpha \cdot m) - 2 \sinh(\alpha m) \sinh(\alpha) \cosh(\alpha)$$

$$2 \cosh(\alpha m) (1 + \sinh(\alpha)^2) - 2 \cosh(\alpha m) - 2 \sinh(\alpha m) \sinh(\alpha) \cosh(\alpha)$$

simplificar

$$2 \sinh(\alpha) (\cosh(\alpha m) \sinh(\alpha) - \sinh(\alpha m) \cosh(\alpha))$$

Temos que o termo com K fica:

$$\begin{aligned}
& K \left(2 e^{-|\alpha|} \sinh(\alpha) \sinh(\alpha m) + 2 \sinh(\alpha) (\cosh(\alpha m) \sinh(\alpha) - \sinh(\alpha m) \cosh(\alpha)) \right) \rightarrow \\
& K \cdot \sinh(\alpha) \left(2 e^{-|\alpha|} \cdot \sinh(\alpha m) + 2 \cdot (\cosh(\alpha m) \sinh(\alpha) - \sinh(\alpha m) \cosh(\alpha)) \right) \\
& K \sinh(\alpha) \left(2 e^{-|\alpha|} \sinh(\alpha m) + 2 \cosh(\alpha m) \sinh(\alpha) - 2 \sinh(\alpha m) \cosh(\alpha) \right)
\end{aligned}$$

Fazendo

$$sha := \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} :$$

$$shma := \frac{e^{m \cdot \alpha} - e^{-m \cdot \alpha}}{2} :$$

$$chma := \frac{e^{m \cdot \alpha} + e^{-m \cdot \alpha}}{2} :$$

$$cha := \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} :$$

Aplicado em:

$$2 e^{-|\alpha|} shma + 2 chma sha - 2 shma cha :$$

Que, para $\alpha > 0$

$$2 e^{-\alpha} shma + 2 chma sha - 2 shma cha$$

$$2 e^{-\alpha} \left(\frac{1}{2} e^{\alpha m} - \frac{1}{2} e^{-\alpha m} \right) + 2 \left(\frac{1}{2} e^{\alpha m} + \frac{1}{2} e^{-\alpha m} \right) \left(\frac{1}{2} e^{\alpha} - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} e^{\alpha m} - \frac{1}{2} e^{-\alpha m} \right) \left(\frac{1}{2} e^{\alpha} + \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right)$$

expandir

$$- \frac{1}{e^{\alpha} e^{\alpha m}} + \frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha m}}$$

Que equivale a:

$$2 \cdot e^{-\alpha \cdot m} \cdot \sinh(\alpha) :$$

E, para $\alpha < 0$:

$$2 e^{\alpha} shma + 2 chma sha - 2 shma cha$$

$$2 e^{\alpha} \left(\frac{1}{2} e^{\alpha m} - \frac{1}{2} e^{-\alpha m} \right) + 2 \left(\frac{1}{2} e^{\alpha m} + \frac{1}{2} e^{-\alpha m} \right) \left(\frac{1}{2} e^{\alpha} - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} e^{\alpha m} - \frac{1}{2} e^{-\alpha m} \right) \left(\frac{1}{2} e^{\alpha} + \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right)$$

expandir

$$e^{\alpha m} e^{\alpha} - \frac{e^{\alpha m}}{e^{\alpha}}$$

Que equivale a:

$$2 \cdot e^{\alpha \cdot m} \cdot \sinh(\alpha) :$$

Ou seja, temos:

$$\begin{cases} K \cdot \sinh(\alpha) \cdot 2 \cdot e^{\alpha \cdot m} \cdot \sinh(\alpha) & \alpha < 0 \\ K \cdot \sinh(\alpha) \cdot 2 \cdot e^{-\alpha \cdot m} \cdot \sinh(\alpha) & \alpha \geq 0 \end{cases}$$

Que é o mesmo que:

$$\sinh(\alpha) \cdot 2 \cdot K \cdot e^{-m \cdot |\alpha|} \cdot \sinh(\alpha)$$

7.9 Anexo 9 – Programação para a eq.(36)

1. Considerando $\alpha > 0$

$$\begin{aligned}
cha &:= \frac{(\exp(\alpha) + \exp(-\alpha))}{2} : \\
sha &:= \frac{(\exp(\alpha) - \exp(-\alpha))}{2} : \\
gn &:= \exp(-n \cdot \alpha) \cdot (cha - n \cdot sha) : \\
Expr &:= \frac{gn \cdot (\exp((m-n) \cdot \alpha) - \exp(-(m-n) \cdot \alpha))}{2} ; \\
Expr &:= \frac{1}{2} e^{-n \alpha} \left(-n \left(\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) + \frac{1}{2} e^\alpha + \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) \left(e^{(m-n) \alpha} - e^{-(m-n) \alpha} \right) \\
Sm &:= expand(sum(Expr, n = 1 .. m - 1)); \\
Sm &:= -\frac{1}{8} \frac{m}{e^\alpha e^{\alpha m}} - \frac{1}{8} \frac{m e^\alpha}{e^{\alpha m}} - \frac{1}{8} \frac{m^2}{e^\alpha e^{\alpha m}} + \frac{1}{8} \frac{e^\alpha m^2}{e^{\alpha m}} - \frac{1}{4} \frac{(e^\alpha)^3}{(-1 + (e^\alpha)^2) e^{\alpha m}} \\
&\quad + \frac{1}{4 e^\alpha e^{\alpha m}} + \frac{1}{4} \frac{e^\alpha}{e^{\alpha m}} + \frac{1}{4} \frac{e^\alpha e^{\alpha m}}{-1 + (e^\alpha)^2} - \frac{1}{4} \frac{e^{\alpha m}}{e^\alpha} \\
Aux1 &:= \frac{(\exp((m-2) \cdot \alpha) - \exp(-(m-2) \cdot \alpha))}{2} ; \\
Aux1 &:= \frac{1}{2} e^{(m-2) \alpha} - \frac{1}{2} e^{-(m-2) \alpha} \\
gma &:= subs(n = m, gn); \\
gma &:= e^{-\alpha m} \left(\frac{1}{2} e^\alpha + \frac{1}{2} e^{-\alpha} - m \left(\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) \right) \\
Smradi &:= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{Aux1}{sha} + 2 \cdot \exp(-m \cdot \alpha) \cdot cha - m \cdot gma \right); \\
Smradi &:= \frac{1}{4} \frac{\frac{1}{2} e^{(m-2) \alpha} - \frac{1}{2} e^{-(m-2) \alpha}}{\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha}} + \frac{1}{2} e^{-\alpha m} \left(\frac{1}{2} e^\alpha + \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) \\
&\quad - \frac{1}{4} m e^{-\alpha m} \left(\frac{1}{2} e^\alpha + \frac{1}{2} e^{-\alpha} - m \left(\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) \right) \\
test &:= Sm - Smradi; \\
test &:= -\frac{1}{8} \frac{m}{e^\alpha e^{\alpha m}} - \frac{1}{8} \frac{m e^\alpha}{e^{\alpha m}} - \frac{1}{8} \frac{m^2}{e^\alpha e^{\alpha m}} + \frac{1}{8} \frac{e^\alpha m^2}{e^{\alpha m}} - \frac{1}{4} \frac{(e^\alpha)^3}{(-1 + (e^\alpha)^2) e^{\alpha m}} \\
&\quad + \frac{1}{4 e^\alpha e^{\alpha m}} + \frac{1}{4} \frac{e^\alpha}{e^{\alpha m}} + \frac{1}{4} \frac{e^\alpha e^{\alpha m}}{-1 + (e^\alpha)^2} - \frac{1}{4} \frac{e^{\alpha m}}{e^\alpha} \\
&\quad - \frac{1}{4} \frac{\frac{1}{2} e^{(m-2) \alpha} - \frac{1}{2} e^{-(m-2) \alpha}}{\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha}} - \frac{1}{2} e^{-\alpha m} \left(\frac{1}{2} e^\alpha + \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) \\
&\quad + \frac{1}{4} m e^{-\alpha m} \left(\frac{1}{2} e^\alpha + \frac{1}{2} e^{-\alpha} - m \left(\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) \right)
\end{aligned}$$

expand((9))

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4} \frac{(\mathrm{e}^{\alpha})^3}{(-1 + (\mathrm{e}^{\alpha})^2) \mathrm{e}^{\alpha m}} + \frac{1}{4} \frac{\mathrm{e}^{\alpha} \mathrm{e}^{\alpha m}}{-1 + (\mathrm{e}^{\alpha})^2} - \frac{1}{4} \frac{\mathrm{e}^{\alpha m}}{\mathrm{e}^{\alpha}} - \frac{1}{8} \frac{\mathrm{e}^{\alpha m}}{\left(\frac{1}{2} \mathrm{e}^{\alpha} - \frac{1}{2 \mathrm{e}^{\alpha}}\right) (\mathrm{e}^{\alpha})^2} \\
 & + \frac{1}{8} \frac{(\mathrm{e}^{\alpha})^2}{\left(\frac{1}{2} \mathrm{e}^{\alpha} - \frac{1}{2 \mathrm{e}^{\alpha}}\right) \mathrm{e}^{\alpha m}}
 \end{aligned}$$

simplify((10))

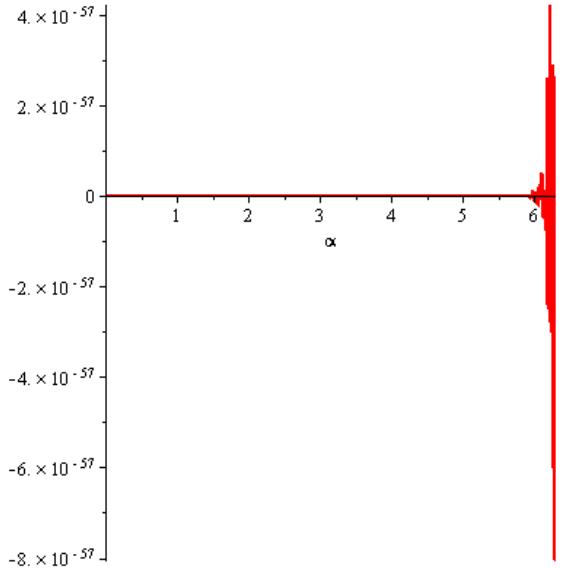
0

-----Ou seja, ambas as fórmulas são equivalentes!

test17 := subs(m = 17, test);

$$\begin{aligned}
 \text{test17} := & -\frac{38}{\mathrm{e}^{\alpha} \mathrm{e}^{17 \alpha}} + \frac{137}{4} \frac{\mathrm{e}^{\alpha}}{\mathrm{e}^{17 \alpha}} - \frac{1}{4} \frac{(\mathrm{e}^{\alpha})^3}{(-1 + (\mathrm{e}^{\alpha})^2) \mathrm{e}^{17 \alpha}} + \frac{1}{4} \frac{\mathrm{e}^{\alpha} \mathrm{e}^{17 \alpha}}{-1 + (\mathrm{e}^{\alpha})^2} \\
 & - \frac{1}{4} \frac{\mathrm{e}^{17 \alpha}}{\mathrm{e}^{\alpha}} - \frac{1}{4} \frac{\frac{1}{2} \mathrm{e}^{15 \alpha} - \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-15 \alpha}}{\frac{1}{2} \mathrm{e}^{\alpha} - \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-\alpha}} - \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-17 \alpha} \left(\frac{1}{2} \mathrm{e}^{\alpha} + \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-\alpha}\right) + \frac{17}{4} \mathrm{e}^{-17 \alpha} \left(-8 \mathrm{e}^{\alpha} + 9 \mathrm{e}^{-\alpha}\right)
 \end{aligned}$$

*plot(test17, alpha = 0 .. 2*Pi);*



S17 := subs(m = 17, Sm);

$$\text{S17} := -\frac{38}{\mathrm{e}^{\alpha} \mathrm{e}^{17 \alpha}} + \frac{137}{4} \frac{\mathrm{e}^{\alpha}}{\mathrm{e}^{17 \alpha}} - \frac{1}{4} \frac{(\mathrm{e}^{\alpha})^3}{(-1 + (\mathrm{e}^{\alpha})^2) \mathrm{e}^{17 \alpha}} + \frac{1}{4} \frac{\mathrm{e}^{\alpha} \mathrm{e}^{17 \alpha}}{-1 + (\mathrm{e}^{\alpha})^2} - \frac{1}{4} \frac{\mathrm{e}^{17 \alpha}}{\mathrm{e}^{\alpha}}$$

S17radi := subs(m = 17, Smradi);

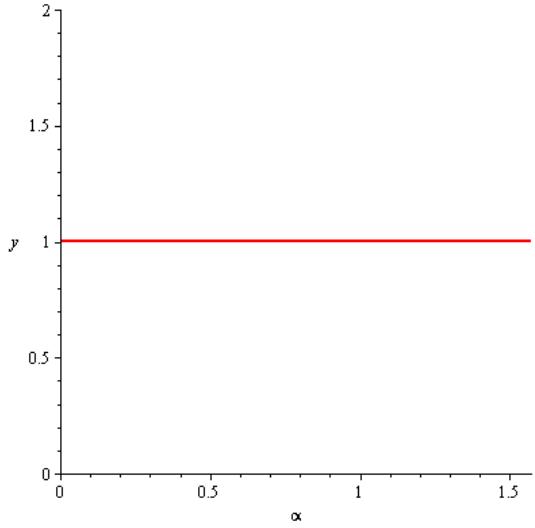
$$SI7radi := \frac{1}{4} \frac{\frac{1}{2} e^{15\alpha} - \frac{1}{2} e^{-15\alpha}}{\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha}} + \frac{1}{2} e^{-17\alpha} \left(\frac{1}{2} e^\alpha + \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) - \frac{17}{4} e^{-17\alpha} (-8 e^\alpha + 9 e^{-\alpha})$$

$$Test17div := \frac{SI7}{SI7radi};$$

$$Test17div :=$$

$$\frac{-\frac{38}{e^\alpha e^{17\alpha}} + \frac{137}{4} \frac{e^\alpha}{e^{17\alpha}} - \frac{1}{4} \frac{(e^\alpha)^3}{(-1 + (e^\alpha)^2) e^{17\alpha}} + \frac{1}{4} \frac{e^\alpha e^{17\alpha}}{-1 + (e^\alpha)^2} - \frac{1}{4} \frac{e^{17\alpha}}{e^\alpha}}{\frac{1}{4} \frac{\frac{1}{2} e^{15\alpha} - \frac{1}{2} e^{-15\alpha}}{\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha}} + \frac{1}{2} e^{-17\alpha} \left(\frac{1}{2} e^\alpha + \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) - \frac{17}{4} e^{-17\alpha} (-8 e^\alpha + 9 e^{-\alpha})}$$

$$plot\left(Test17div, \alpha = 0 .. \frac{\pi}{2}, y = 0 .. 2 \right);$$



2. Considerando $\alpha < 0$

$$cha := \frac{(\exp(\alpha) + \exp(-\alpha))}{2};$$

$$sha := \frac{(\exp(\alpha) - \exp(-\alpha))}{2};$$

$$gn := \exp(n \cdot \alpha) \cdot (cha + n \cdot sha);$$

$$gn := e^{n\alpha} \left(\frac{1}{2} e^\alpha + \frac{1}{2} e^{-\alpha} + n \left(\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) \right)$$

$$Expr := \frac{gn \cdot (\exp((m-n) \cdot \alpha) - \exp(-(m-n) \cdot \alpha))}{2};$$

$$Expr := \frac{1}{2} e^{n\alpha} \left(\frac{1}{2} e^\alpha + \frac{1}{2} e^{-\alpha} + n \left(\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) \right) (e^{(m-n)\alpha} - e^{-(m-n)\alpha})$$

$$\begin{aligned}
Sm &:= \text{expand}(\text{sum}(\text{Expr}, n = 1 .. m - 1)); \\
Sm &:= \frac{1}{8} m e^\alpha e^{\alpha m} + \frac{1}{8} \frac{m e^{\alpha m}}{e^\alpha} - \frac{1}{8} \frac{e^{\alpha m} m^2}{e^\alpha} + \frac{1}{8} e^{\alpha m} e^\alpha m^2 - \frac{1}{4} \frac{e^{\alpha m}}{e^\alpha \left(-1 + (e^\alpha)^2 \right)} \\
&\quad - \frac{1}{4} e^\alpha e^{\alpha m} - \frac{1}{4} \frac{e^{\alpha m}}{e^\alpha} + \frac{1}{4} \frac{e^\alpha}{e^{\alpha m} \left(-1 + (e^\alpha)^2 \right)} + \frac{1}{4} \frac{e^\alpha}{e^{\alpha m}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Aux1 &:= \frac{(\exp((m-2) \cdot \alpha) - \exp(-(m-2) \cdot \alpha))}{2}; \\
Aux1 &:= \frac{1}{2} e^{(m-2) \alpha} - \frac{1}{2} e^{-(m-2) \alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
gma &:= \text{subs}(n = m, gn); \\
gma &:= e^{\alpha m} \left(\frac{1}{2} e^\alpha + \frac{1}{2} e^{-\alpha} + m \left(\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Smradi &:= -\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{Aux1}{sha} + 2 \cdot \exp(m \cdot \alpha) \cdot cha - m \cdot gma \right); \\
Smradi &:= -\frac{1}{4} \frac{\frac{1}{2} e^{(m-2) \alpha} - \frac{1}{2} e^{-(m-2) \alpha}}{\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha}} - \frac{1}{2} e^{\alpha m} \left(\frac{1}{2} e^\alpha + \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) \\
&\quad + \frac{1}{4} m e^{\alpha m} \left(\frac{1}{2} e^\alpha + \frac{1}{2} e^{-\alpha} + m \left(\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
test &:= Sm - Smradi; \\
test &:= \frac{1}{8} m e^\alpha e^{\alpha m} + \frac{1}{8} \frac{m e^{\alpha m}}{e^\alpha} - \frac{1}{8} \frac{e^{\alpha m} m^2}{e^\alpha} + \frac{1}{8} e^{\alpha m} e^\alpha m^2 - \frac{1}{4} \frac{e^{\alpha m}}{e^\alpha \left(-1 + (e^\alpha)^2 \right)} \\
&\quad - \frac{1}{4} e^\alpha e^{\alpha m} - \frac{1}{4} \frac{e^{\alpha m}}{e^\alpha} + \frac{1}{4} \frac{e^\alpha}{e^{\alpha m} \left(-1 + (e^\alpha)^2 \right)} + \frac{1}{4} \frac{e^\alpha}{e^{\alpha m}} \\
&\quad + \frac{1}{4} \frac{\frac{1}{2} e^{(m-2) \alpha} - \frac{1}{2} e^{-(m-2) \alpha}}{\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha}} + \frac{1}{2} e^{\alpha m} \left(\frac{1}{2} e^\alpha + \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) - \frac{1}{4} m e^{\alpha m} \left(\frac{1}{2} e^\alpha \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} e^{-\alpha} + m \left(\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{expand((22))} \\
&-\frac{1}{4} \frac{e^{\alpha m}}{e^\alpha \left(-1 + (e^\alpha)^2 \right)} + \frac{1}{4} \frac{e^\alpha}{\left(-1 + (e^\alpha)^2 \right) e^{\alpha m}} + \frac{1}{4} \frac{e^\alpha}{e^{\alpha m}} \\
&+ \frac{1}{8} \frac{e^{\alpha m}}{\left(\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) (e^\alpha)^2} - \frac{1}{8} \frac{(e^\alpha)^2}{\left(\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) e^{\alpha m}}
\end{aligned}$$

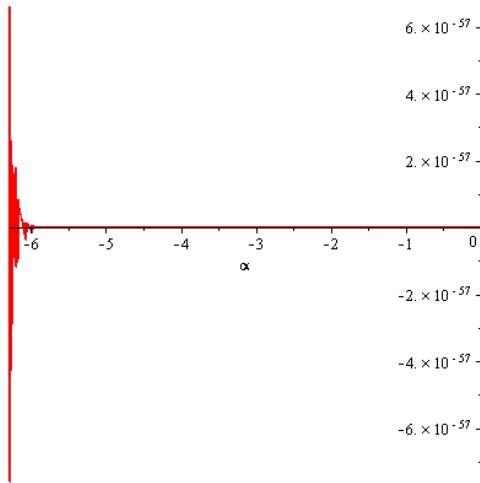
$$\begin{aligned}
&\text{simplify((23))} \\
&0
\end{aligned}$$

----Ou seja, ambas as fórmulas são equivalentes!!

test17 := subs(m = 17, test);

$$\begin{aligned}
 test17 := & 38 e^{\alpha} e^{17\alpha} - \frac{137}{4} \frac{e^{17\alpha}}{e^{\alpha}} - \frac{1}{4} \frac{e^{17\alpha}}{e^{\alpha}(-1 + (e^{\alpha})^2)} + \frac{1}{4} \frac{e^{\alpha}}{e^{17\alpha}(-1 + (e^{\alpha})^2)} \\
 & + \frac{1}{4} \frac{e^{\alpha}}{e^{17\alpha}} + \frac{1}{4} \frac{\frac{1}{2} e^{15\alpha} - \frac{1}{2} e^{-15\alpha}}{\frac{1}{2} e^{\alpha} - \frac{1}{2} e^{-\alpha}} + \frac{1}{2} e^{17\alpha} \left(\frac{1}{2} e^{\alpha} + \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) - \frac{17}{4} e^{17\alpha} (9 e^{\alpha} \\
 & - 8 e^{-\alpha})
 \end{aligned}$$

*plot(test17, alpha = -2*Pi .. 0);*



S17 := subs(m = 17, Sm);

$$\begin{aligned}
 S17 := & 38 e^{\alpha} e^{17\alpha} - \frac{137}{4} \frac{e^{17\alpha}}{e^{\alpha}} - \frac{1}{4} \frac{e^{17\alpha}}{e^{\alpha}(-1 + (e^{\alpha})^2)} + \frac{1}{4} \frac{e^{\alpha}}{e^{17\alpha}(-1 + (e^{\alpha})^2)} \\
 & + \frac{1}{4} \frac{e^{\alpha}}{e^{17\alpha}}
 \end{aligned}$$

S17radi := subs(m = 17, Smradi);

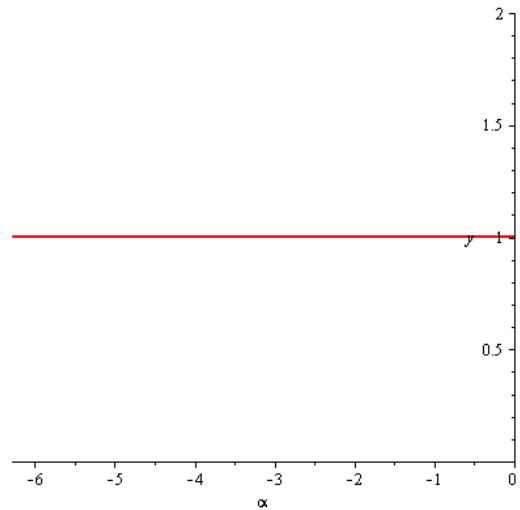
$$\begin{aligned}
 S17radi := & -\frac{1}{4} \frac{\frac{1}{2} e^{15\alpha} - \frac{1}{2} e^{-15\alpha}}{\frac{1}{2} e^{\alpha} - \frac{1}{2} e^{-\alpha}} - \frac{1}{2} e^{17\alpha} \left(\frac{1}{2} e^{\alpha} + \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) + \frac{17}{4} e^{17\alpha} (9 e^{\alpha} \\
 & - 8 e^{-\alpha})
 \end{aligned}$$

$$Test17div := \frac{S17}{S17radi};$$

Test17div :=

$$\begin{aligned}
 & \left(38 e^\alpha e^{17\alpha} - \frac{137}{4} \frac{e^{17\alpha}}{e^\alpha} - \frac{1}{4} \frac{e^{17\alpha}}{e^\alpha \left(-1 + (e^\alpha)^2 \right)} + \frac{1}{4} \frac{e^\alpha}{e^{17\alpha} \left(-1 + (e^\alpha)^2 \right)} \right. \\
 & + \frac{1}{4} \frac{e^\alpha}{e^{17\alpha}} \Bigg) \Bigg/ \left(-\frac{1}{4} \frac{\frac{1}{2} e^{15\alpha} - \frac{1}{2} e^{-15\alpha}}{\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha}} - \frac{1}{2} e^{17\alpha} \left(\frac{1}{2} e^\alpha + \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) \right. \\
 & \left. \left. + \frac{17}{4} e^{17\alpha} (9 e^\alpha - 8 e^{-\alpha}) \right) \right)
 \end{aligned}$$

plot(Test17div, alpha = -2..Pi, y = 0..2);



7.10 Anexo 10 – Dedução das eqs.(37), (38) e (39)

[numeração de fórmulas conforme Radi (2011)]

(46)-----

Usando:

(31)

$$g_n := e^{-n \cdot |\alpha|} \cdot (\cosh(\alpha) - n \cdot \sinh(|\alpha|)) :$$

Temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n \cdot e^{-n \cdot |\alpha|} \rightarrow \frac{(\cosh(\alpha) - \sinh(|\alpha|)) e^{2|\alpha|} - \cosh(\alpha)}{(-1 + e^{2|\alpha|})^2}$$

$$cha := \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} : \quad sha := \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} :$$

1. Para alpha>=0

$$\frac{(cha - sha) \cdot e^{2\alpha} - cha}{(-1 + e^{2\alpha})^2} \rightarrow \frac{e^{-\alpha} e^{2\alpha} - \frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha}}{(-1 + e^{2\alpha})^2}$$

expandir

$$\frac{1}{2} \frac{e^\alpha}{(-1 + (e^\alpha)^2)^2} - \frac{1}{2} \frac{e^{-\alpha}}{(-1 + (e^\alpha)^2)^2}$$

simplificar

$$\frac{1}{2} \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{(-1 + e^{2\alpha})^2}$$

→ $\frac{\sinh(\alpha)}{(-1 + e^{2\alpha})^2} \rightarrow \frac{1}{2 \cdot e^\alpha \cdot (-1 + e^{2\alpha})} \cdot \frac{2 \cdot e^\alpha}{2 \cdot e^\alpha} \rightarrow \frac{1}{4 \cdot e^{2\alpha}} \cdot \frac{1}{\sinh(\alpha)} \rightarrow \frac{e^{-2\alpha}}{4 \cdot \sinh(\alpha)}$

2. Para alpha<0

$$\frac{(cha + sha) \cdot e^{-2\alpha} - cha}{(-1 + e^{-2\alpha})^2} \rightarrow \frac{e^\alpha e^{-2\alpha} - \frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha}}{(-1 + e^{-2\alpha})^2}$$

expandir

$$\frac{1}{2 \left(-1 + \frac{1}{(e^\alpha)^2} \right)^2} e^\alpha - \frac{1}{2} \frac{e^\alpha}{\left(-1 + \frac{1}{(e^\alpha)^2} \right)^2}$$

simplificar

$$\frac{1}{2} \frac{e^{3\alpha} - e^{5\alpha}}{(-1 + e^{2\alpha})^2}$$

→ $\frac{e^{2\alpha}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot e^\alpha}{(e^{2\alpha} - 1)} \cdot \frac{1}{(-1)} \cdot \frac{(1 - e^{2\alpha})}{(1 - e^{2\alpha})} \rightarrow \frac{e^{2\alpha}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(-1) \cdot \sinh(\alpha)} \rightarrow \frac{e^{-2\alpha}}{4 \cdot \sinh(-\alpha)}$

Assim:

$$\begin{cases} \frac{e^{-2 \cdot (-\alpha)}}{4 \cdot \sinh(-\alpha)} & \alpha < a \\ \frac{e^{-2 \cdot \alpha}}{4 \cdot \sinh(\alpha)} & \alpha \geq a \end{cases}$$

Portanto:

$$\rightarrow \frac{e^{-2 \cdot |\alpha|}}{4 \cdot \sinh(|\alpha|)}$$

Que é a fórmula (46).

(47)-----

De (43):

$$\# \Phi_{EI} = 2 \cdot K \cdot e^{-|\alpha|} \cdot \sinh(\alpha) + B - 4 \cdot \left(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} \right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cdot e^{-n \cdot |\alpha|} \cdot \sinh(\alpha)$$

Com o uso de (46):

$$\# \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cdot e^{-n \cdot |\alpha|} := \frac{e^{-2 \cdot |\alpha|}}{4 \cdot \sinh(|\alpha|)} :$$

$$\begin{aligned} \Phi_{EI} &= 2 \cdot K \cdot e^{-|\alpha|} \cdot \sinh(\alpha) + B - 4 \cdot \left(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} \right) \cdot \frac{e^{-2 \cdot |\alpha|}}{4 \cdot \sinh(|\alpha|)} \cdot \sinh(\alpha) \\ \Phi_{EI} &= 2 K e^{-|\alpha|} \sinh(\alpha) + B - \frac{(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty}) e^{-2 |\alpha|} \sinh(\alpha)}{\sinh(|\alpha|)} \end{aligned}$$

Mas como

$$\# \sinh(|\alpha|) = \text{sign}(\alpha) \cdot \sinh(\alpha)$$

Temos:

$$\# \Phi_{EI} = 2 K e^{-|\alpha|} \sinh(\alpha) + B - \text{sign}(\alpha) \cdot (\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty}) e^{-2 |\alpha|}$$

Nota-se que ele esqueceu do sinal de negativo após o B!

(48)-----

A fórmula (48) é obtida aplicando as fórmulas (45) e (46) em (44):

$$\text{Formula}_{45} := \frac{1}{4} \cdot \text{sign}(\alpha) \cdot \left(\frac{\sinh((m-2) \cdot \alpha)}{\sinh(\alpha)} + 2 \cdot e^{-m \cdot |\alpha|} \cdot \cosh(\alpha) - m \cdot g_m \right) :$$

$$\text{Formula}_{46} := \frac{e^{-2 \cdot |\alpha|}}{4 \cdot \sinh(\alpha)} :$$

(44):

$$\Phi_m^*(\alpha) = 2 \cdot K \cdot e^{-m \cdot |\alpha|} \cdot \sinh(\alpha) + 4 \cdot \left(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} \right) \cdot (\text{Formula}_{45} - \sinh(m \cdot \alpha) \cdot \text{Formula}_{46})$$

$$\Phi_m^*(\alpha) = 2K e^{-m|\alpha|} \sinh(\alpha) + 4(\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty) \left(\frac{1}{4} \frac{\sinh((m-2)\alpha)}{\sinh(\alpha)} + \frac{1}{2} e^{-m|\alpha|} \cosh(\alpha) - \frac{1}{4} m g_m - \frac{1}{4} \frac{\sinh(m\alpha) e^{-2|\alpha|}}{\sinh(\alpha)} \right)$$

Comparando com a Equação proposta por Radi, tem-se que o fator que diferencia ambas as fórmulas é:

$$4 \cdot (\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty) \left(\frac{1}{4} \frac{\sinh((m-2)\alpha)}{\sinh(\alpha)} + \frac{1}{2} e^{-m|\alpha|} \cosh(\alpha) - \frac{1}{4} \frac{\sinh(m\alpha) e^{-2|\alpha|}}{\sinh(\alpha)} \right)$$

Ou seja, o seguinte fator deve ser nulo:

$$\left(\frac{1}{4} \frac{\sinh((m-2)\alpha)}{\sinh(\alpha)} + \frac{1}{2} e^{-m|\alpha|} \cosh(\alpha) - \frac{1}{4} \frac{\sinh(m\alpha) e^{-2|\alpha|}}{\sinh(\alpha)} \right) - \left(\frac{1}{4} \frac{\sinh((m-2)\alpha)}{\sinh(\alpha)} + \frac{1}{2} e^{-m|\alpha|} \cosh(\alpha) - \frac{1}{4} \frac{\sinh(m\alpha) e^{-2|\alpha|}}{\sinh(\alpha)} \right)$$

simplificar

$$\frac{1}{4} \frac{2 e^{-m|\alpha|} \cosh(\alpha) \sinh(\alpha) - \sinh(m\alpha) e^{-2|\alpha|} + \sinh((m-2)\alpha)}{\sinh(\alpha)}$$

Isto é, deve ser nulo:

$$2 e^{-m|\alpha|} \cosh(\alpha) \sinh(\alpha) - \sinh(m\alpha) e^{-2|\alpha|} + \sinh((m-2)\alpha) :$$

Abrindo os senos/cossenos hiperbólicos:

$$e^{-m|\alpha|} \cdot \frac{e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}}{2} - e^{-2|\alpha|} \cdot \frac{e^{m\alpha} - e^{-m\alpha}}{2} + \frac{e^{(m-2)\alpha} - e^{-(m-2)\alpha}}{2} \\ e^{-m|\alpha|} \left(\frac{1}{2} e^{2\alpha} - \frac{1}{2} e^{-2\alpha} \right) - e^{-2|\alpha|} \left(\frac{1}{2} e^{m\alpha} - \frac{1}{2} e^{-m\alpha} \right) + \frac{1}{2} e^{(m-2)\alpha} - \frac{1}{2} e^{-(m-2)\alpha}$$

Considerando Alpha positivo:

$$e^{-m\alpha} \cdot \frac{e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}}{2} - e^{-2\alpha} \cdot \frac{e^{m\alpha} - e^{-m\alpha}}{2} + \frac{e^{(m-2)\alpha} - e^{-(m-2)\alpha}}{2} \\ e^{-m\alpha} \left(\frac{1}{2} e^{2\alpha} - \frac{1}{2} e^{-2\alpha} \right) - e^{-2\alpha} \left(\frac{1}{2} e^{m\alpha} - \frac{1}{2} e^{-m\alpha} \right) + \frac{1}{2} e^{(m-2)\alpha} - \frac{1}{2} e^{-(m-2)\alpha}$$

expandir

$$0$$

Considerando Alpha negativo:

$$e^{m\alpha} \cdot \frac{e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}}{2} - e^{2\alpha} \cdot \frac{e^{m\alpha} - e^{-m\alpha}}{2} + \frac{e^{(m-2)\alpha} - e^{-(m-2)\alpha}}{2} \\ e^{m\alpha} \left(\frac{1}{2} e^{2\alpha} - \frac{1}{2} e^{-2\alpha} \right) - e^{2\alpha} \left(\frac{1}{2} e^{m\alpha} - \frac{1}{2} e^{-m\alpha} \right) + \frac{1}{2} e^{(m-2)\alpha} - \frac{1}{2} e^{-(m-2)\alpha}$$

expandir

$$0$$

Conclui-se que ambas as fórmulas são equivalentes.

7.11 Anexo 11 – Dedução das eqs.(40) a (44)

[numeração de fórmulas conforme Radi (2011)]

(49) ----- (dedução parcial)

A partir de:

(39)

$$\Phi_{n-1} - 2 \cdot \Phi_n \cdot \cosh(\alpha) + \Phi_{n+1} - 2 \cdot \Phi_{En} \cdot \sinh(\alpha) + 2 \cdot (K \cdot \cosh(\alpha) + B \cdot \sinh(\alpha)) \cdot \delta_{n2} + 2 \cdot r \cdot S_n = 0 :$$

$m >= 2 \dots$

$$\# \sum_{n=1}^{m-1} (\Phi_{n-1} - 2 \cdot \Phi_n \cdot \cosh(\alpha) + \Phi_{n+1} - 2 \cdot \Phi_{En} \cdot \sinh(\alpha) + 2 \cdot (K \cdot \cosh(\alpha) + B \cdot \sinh(\alpha)) \cdot \delta_{n2} + 2 \cdot n \cdot S_n) \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) = 0 \rightarrow$$

Pode ser quebrado em três somatórios:

(i)

$$\# \sum_{n=1}^{m-1} (\Phi_{n-1} - 2 \cdot \Phi_n \cdot \cosh(\alpha) + \Phi_{n+1} - 2 \cdot \Phi_{En} \cdot \sinh(\alpha)) \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha)$$

Que pode ser aberta em quatro somatórios:

(a)

$$\# -2 \cdot \cosh(\alpha) \sum_{n=1}^{m-1} \Phi_n \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha)$$

(b)

$$\# \sum_{n=1}^{m-1} \Phi_{n+1} \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \rightarrow \text{com } N = n+1 \rightarrow \sum_{N=2}^m \Phi_N \cdot \sinh((m-(N-1)) \cdot \alpha) \rightarrow \sum_{N=2}^m \\ = \sum_{N=1}^{m-1} + \sum_{N=m}^m - \sum_{N=1}^1 \rightarrow$$

$$\# \rightarrow \sum_{N=2}^m \Phi_N \cdot \sinh((m-(N-1)) \cdot \alpha) = \sum_{N=1}^{m-1} \Phi_N \cdot \sinh((m+1-N) \cdot \alpha) + \Phi_m \cdot \sinh(\alpha)$$

(c)

$$\# \sum_{n=1}^{m-1} \Phi_{n-1} \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \rightarrow \text{com } N = n-1 \rightarrow \sum_{N=0}^{m-2} \Phi_N \cdot \sinh((m-(N+1)) \cdot \alpha) \rightarrow \sum_{N=0}^{m-2} \\ = \sum_{N=1}^{m-1} + \sum_{N=0}^0 - \sum_{N=m-1}^{m-1} \rightarrow$$

$$\# \rightarrow \sum_{N=0}^{m-2} \Phi_N \cdot \sinh((m-(N+1)) \cdot \alpha) = \sum_{N=1}^{m-1} \Phi_N \cdot \sinh((m-1-N) \cdot \alpha)$$

(d)

$$\# -2 \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sum_{n=1}^{m-1} \Phi_{En} \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \rightarrow \text{usando (48)}$$

$$\begin{aligned}
& \# \rightarrow -2 \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sum_{n=1}^{m-1} \left(2 \cdot K \cdot e^{-n \cdot |\alpha|} \cdot \sinh(\alpha) - \left(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} \right) \cdot n \cdot g_n \cdot \text{sign}(\alpha) \right) \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \rightarrow \\
& \# \rightarrow -4 \cdot K \cdot \sinh(\alpha)^2 \cdot \sum_{n=1}^{m-1} e^{-n \cdot |\alpha|} \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) + 2 \cdot \text{sign}(\alpha) \cdot \sinh(\alpha) \cdot \left(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} \right) \\
& \cdot \sum_{n=1}^{m-1} n \cdot g_n \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha)
\end{aligned}$$

Portanto, somando-se os quatro termos:

$$\begin{aligned}
& \#(a) \rightarrow -2 \cdot \cosh(\alpha) \sum_{n=1}^{m-1} \Phi_n \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \\
& \#(b) \rightarrow \sum_{n=1}^{m-1} \Phi_n \cdot \sinh((m+1-n) \cdot \alpha) + \Phi_m \cdot \sinh(\alpha) \\
& \#(c) \rightarrow \sum_{n=1}^{m-1} \Phi_n \cdot \sinh((m-1-n) \cdot \alpha) \\
& \#(d) \rightarrow -4 \cdot K \cdot \sinh(\alpha)^2 \cdot \sum_{n=1}^{m-1} e^{-n \cdot |\alpha|} \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) + 2 \cdot \text{sign}(\alpha) \cdot \sinh(\alpha) \cdot \left(\sigma_{22}^{\infty} \right. \\
& \quad \left. - \sigma_{11}^{\infty} \right) \cdot \sum_{n=1}^{m-1} n \cdot g_n \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha)
\end{aligned}$$

Mas como (a) + parte_(b) + (c) =

$$\begin{aligned}
& -\Phi_n \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \cdot 2 \cdot \cosh(\alpha) + \Phi_n \cdot \sinh((m+1-n) \cdot \alpha) + \Phi_n \cdot \sinh((m-1-n) \cdot \alpha) \\
& - 2 \Phi_n \sinh((m-n) \alpha) \cosh(\alpha) + \Phi_n \sinh(\alpha(m-n+1)) + \Phi_n \sinh(\alpha(m-n-1))
\end{aligned}$$

expandir \equiv

0

Temos que (a)+(b)+(c)+(d) =

$$\begin{aligned}
& \# \rightarrow \Phi_m \cdot \sinh(\alpha) - 4 \cdot K \cdot \sinh(\alpha)^2 \cdot \sum_{n=1}^{m-1} e^{-n \cdot |\alpha|} \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) + 2 \cdot \text{sign}(\alpha) \cdot \sinh(\alpha) \\
& \cdot \left(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} \right) \cdot \sum_{n=1}^{m-1} n \cdot g_n \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha)
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
& \# \sum_{n=1}^{m-1} \left(2 \cdot (K \cdot \cosh(\alpha) + B \cdot \sinh(\alpha)) \cdot \delta_{n2} \right) \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \rightarrow 2 \cdot (K \cdot \cosh(\alpha) + B \cdot \sinh(\alpha)) \\
& \cdot \sinh((m-2) \cdot \alpha)
\end{aligned}$$

$$\# \rightarrow 2 \cdot K \cdot \cosh(\alpha) \cdot \sinh((m-2) \cdot \alpha) + 2 \cdot B \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sinh((m-2) \cdot \alpha)$$

(iii)

$$\begin{aligned}
& \# \sum_{n=1}^{m-1} \left(2 \cdot n \cdot \sigma_n^{\infty} \right) \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \rightarrow \text{usando (28)} \rightarrow \sum_{n=1}^{m-1} \left(2 \cdot n \cdot 2 \cdot \left(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} \right) \cdot g_n \right. \\
& \quad \left. \cdot \sinh(|\alpha|) \right) \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \rightarrow
\end{aligned}$$

$$\# \rightarrow 4 \cdot \text{sign}(\alpha) \cdot \sinh(\alpha) \cdot \left(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} \right) \cdot \sum_{n=1}^{m-1} n \cdot g_n \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha)$$

Fazendo (i)+(ii)+(iii):

$$\begin{aligned} \# \rightarrow \Phi_m \cdot \sinh(\alpha) - 4 \cdot K \cdot \sinh(\alpha)^2 \cdot \sum_{n=1}^{m-1} e^{-n \cdot |\alpha|} \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) + 6 \cdot \text{sign}(\alpha) \cdot \sinh(\alpha) \\ \cdot \left(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} \right) \cdot \sum_{n=1}^{m-1} n \cdot g_n \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) + 2 \cdot K \cdot \cosh(\alpha) \cdot \sinh((m-2) \cdot \alpha) + 2 \cdot B \\ \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sinh((m-2) \cdot \alpha) = 0 \rightarrow \\ \# \rightarrow \Phi_m = 4 \cdot K \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sum_{n=1}^{m-1} e^{-n \cdot |\alpha|} \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) - 6 \cdot \text{sign}(\alpha) \cdot \left(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} \right) \cdot \sum_{n=1}^{m-1} n \cdot g_n \\ \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) - \frac{2 \cdot K \cdot \cosh(\alpha)}{\sinh(\alpha)} \cdot \sinh((m-2) \cdot \alpha) - 2 \cdot B \cdot \sinh((m-2) \cdot \alpha) \rightarrow \end{aligned}$$

É possível colocar o sign(alpha) dentro do somatório colocando o módulo em alpha

$$\begin{aligned} \# \rightarrow \Phi_m = 4 \cdot K \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sum_{n=1}^{m-1} e^{-n \cdot |\alpha|} \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) - 6 \cdot \left(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty} \right) \cdot \sum_{n=1}^{m-1} n \cdot g_n \\ \cdot \sinh((m-n) \cdot |\alpha|) - \frac{2 \cdot K \cdot \cosh(\alpha)}{\sinh(\alpha)} \cdot \sinh((m-2) \cdot \alpha) - 2 \cdot B \cdot \sinh((m-2) \cdot \alpha) \rightarrow \end{aligned}$$

(...) Dedução a ser continuada.

(50) ----- (dedução parcial)

A partir de:

(42)

$$\begin{aligned} \# \Psi_{En-1} - 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Psi_{En} + \Psi_{En+1} + 2 \cdot t_n = 0 \\ \# \sum_{n=1}^{m-1} \left(\Psi_{En-1} - 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Psi_{En} + \Psi_{En+1} + 2 \cdot t_n \right) \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) = 0 \rightarrow \text{com (29)} \\ \rightarrow \sum_{n=1}^{m-1} \left(\Psi_{En-1} - 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Psi_{En} + \Psi_{En+1} + 2 \cdot \left(4 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot g_n \cdot \sinh(|\alpha|) \right) \right) \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) = 0 \rightarrow \\ \# \rightarrow \sum_{n=1}^{m-1} \left(\Psi_{En-1} - 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Psi_{En} + \Psi_{En+1} + 2 \cdot \left(4 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot g_n \cdot \sinh(|\alpha|) \right) \right) \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) = 0 \rightarrow \end{aligned}$$

Pode ser aberto em quatro somatórios:

(i)

$$\begin{aligned} \# \sum_{n=1}^{m-1} \Psi_{En-1} \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \rightarrow \text{com } N = n-1 \rightarrow \sum_{N=0}^{m-2} \Psi_{EN} \cdot \sinh((m-(N+1)) \cdot \alpha) \rightarrow \sum_{N=0}^{m-2} \\ = \sum_{N=1}^{m-1} + \sum_{N=0}^0 - \sum_{N=m-1}^{m-1} \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \# \rightarrow \sum_{N=0}^{m-2} \Psi_{EN} \cdot \sinh((m - (N+1)) \cdot \alpha) = \sum_{N=1}^{m-1} \Psi_{EN} \cdot \sinh((m - N - 1) \cdot \alpha) \\
& \text{(ii)} \\
& \# \sum_{n=1}^{m-1} - 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Psi_{En} \cdot \sinh((m - n) \cdot \alpha) \\
& \text{(iii)} \\
& \# \sum_{n=1}^{m-1} \Psi_{En+1} \cdot \sinh((m - n) \cdot \alpha) \rightarrow \text{com } N = n + 1 \rightarrow \sum_{N=2}^m \Psi_{EN} \cdot \sinh((m - (N-1)) \cdot \alpha) \rightarrow \sum_{N=2}^m \\
& = \sum_{N=1}^{m-1} + \sum_{N=1}^1 - \sum_{N=m}^m \rightarrow \\
& \# \rightarrow \sum_{N=2}^m \Psi_{EN} \cdot \sinh((m - (N-1)) \cdot \alpha) = \sum_{N=1}^{m-1} \Psi_{EN} \cdot \sinh((m - N + 1) \cdot \alpha) + \Psi_{EI} \cdot \sinh(m \cdot \alpha) \\
& - \Psi_{Em} \cdot \sinh(\alpha) \\
& \text{(iv)} \\
& \# 8 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot \sinh(|\alpha|) \cdot \sum_{n=1}^{m-1} g_n \cdot \sinh((m - n) \cdot \alpha) \rightarrow \text{usando (45)} \rightarrow 8 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot \sinh(|\alpha|) \cdot \frac{1}{4} \cdot \text{sign}(\alpha) \\
& \cdot \left(\frac{\sinh((m-2) \cdot \alpha)}{\sinh(\alpha)} + 2 \cdot e^{-m \cdot |\alpha|} \cdot \cosh(\alpha) - m \cdot g_m \right) \rightarrow \\
& \# \rightarrow 2 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot \sinh(\alpha) \cdot \left(\frac{\sinh((m-2) \cdot \alpha)}{\sinh(\alpha)} + 2 \cdot e^{-m \cdot |\alpha|} \cdot \cosh(\alpha) - m \cdot g_m \right) \\
& \#(i) \rightarrow \sum_{n=1}^{m-1} \Psi_{En} \cdot \sinh((m - n - 1) \cdot \alpha) \\
& \#(ii) \rightarrow \sum_{n=1}^{m-1} - 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Psi_{En} \cdot \sinh((m - n) \cdot \alpha) \\
& \#(iii) \rightarrow \sum_{n=1}^{m-1} \Psi_{En} \cdot \sinh((m - n + 1) \cdot \alpha) + \Psi_{EI} \cdot \sinh(m \cdot \alpha) - \Psi_{Em} \cdot \sinh(\alpha) \\
& \#(iv) \rightarrow 2 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot \sinh(\alpha) \cdot \left(\frac{\sinh((m-2) \cdot \alpha)}{\sinh(\alpha)} + 2 \cdot e^{-m \cdot |\alpha|} \cdot \cosh(\alpha) - m \cdot g_m \right) \\
& \text{Mas como (i) + (ii) + parte_ (iii) =} \\
& \Psi_{En} \cdot \sinh((m - n - 1) \cdot \alpha) - 2 \cdot \cosh(\alpha) \cdot \Psi_{En} \cdot \sinh((m - n) \cdot \alpha) + \Psi_{En} \cdot \sinh((m - n + 1) \cdot \alpha) \\
& \Psi_{En} \sinh((m - n - 1) \alpha) - 2 \cosh(\alpha) \Psi_{En} \sinh((m - n) \alpha) + \Psi_{En} \sinh((m - n + 1) \alpha) \\
& \text{expandir} \\
& \underline{\underline{0}}
\end{aligned}$$

Temos que a soma é:

$$\begin{aligned}
& \# \rightarrow \Psi_{EI} \cdot \sinh(m \cdot \alpha) - \Psi_{Em} \cdot \sinh(\alpha) + 2 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot \sinh(\alpha) \cdot \left(\frac{\sinh((m-2) \cdot \alpha)}{\sinh(\alpha)} + 2 \cdot e^{-m \cdot |\alpha|} \right. \\
& \left. \cdot \cosh(\alpha) - m \cdot g_m \right) = 0 \rightarrow \text{com (38)} \rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \# \rightarrow 2 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot e^{-2 \cdot |\alpha|} \cdot \sinh(m \cdot \alpha) - \Psi_{Em} \cdot \sinh(\alpha) + 2 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot \sinh(\alpha) \cdot \left(\frac{\sinh((m-2) \cdot \alpha)}{\sinh(\alpha)} + 2 \cdot e^{-m \cdot |\alpha|} \cdot \cosh(\alpha) - m \cdot g_m \right) = 0 \rightarrow \text{com (38)} \rightarrow \\
& \# \rightarrow \Psi_{Em} = 2 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot e^{-2 \cdot |\alpha|} \cdot \frac{\sinh(m \cdot \alpha)}{\sinh(\alpha)} + 2 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot \left(\frac{\sinh((m-2) \cdot \alpha)}{\sinh(\alpha)} + 2 \cdot e^{-m \cdot |\alpha|} \cdot \cosh(\alpha) - m \cdot g_m \right) \rightarrow \\
& \# \rightarrow \Psi_{Em} = 2 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot e^{-2 \cdot |\alpha|} \cdot \frac{\sinh(m \cdot \alpha)}{\sinh(\alpha)} + 2 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot \left(\frac{\sinh((m-2) \cdot \alpha)}{\sinh(\alpha)} + 2 \cdot e^{-m \cdot |\alpha|} \cdot \cosh(\alpha) - m \cdot g_m \right) \rightarrow \\
& \# \rightarrow \Psi_{Em} = 2 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot e^{-2 \cdot |\alpha|} \cdot \frac{\sinh(m \cdot \alpha)}{\sinh(\alpha)} + 2 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot \frac{\sinh((m-2) \cdot \alpha)}{\sinh(\alpha)} + 2 \cdot e^{-m \cdot |\alpha|} \cdot \cosh(\alpha) - 2 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot m \cdot g_m
\end{aligned}$$

(...) Dedução a ser continuada.

(51) -----

1) Considerando $\alpha > 0$

$$cha := \frac{(\exp(\alpha) + \exp(-\alpha))}{2};$$

$$cha := \frac{1}{2} e^{\alpha} + \frac{1}{2} e^{-\alpha}$$

$$sha := \frac{(\exp(\alpha) - \exp(-\alpha))}{2};$$

$$sha := \frac{1}{2} e^{\alpha} - \frac{1}{2} e^{-\alpha}$$

$$gn := \exp(-n \cdot \alpha) \cdot (cha - n \cdot sha);$$

$$gn := e^{-n \alpha} \left(-n \left(\frac{1}{2} e^{\alpha} - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) + \frac{1}{2} e^{\alpha} + \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right)$$

$$Expr := \frac{n \cdot gn \cdot (\exp((m-n) \cdot \alpha) - \exp(-(m-n) \cdot \alpha))}{2};$$

$$Expr := \frac{1}{2} n e^{-n \alpha} \left(-n \left(\frac{1}{2} e^{\alpha} - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) + \frac{1}{2} e^{\alpha} + \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) (e^{(m-n) \alpha} - e^{-(m-n) \alpha})$$

$$Sm := \text{expand}(\text{sum}(Expr, n=1..m-1));$$

$$Sm := -\frac{1}{12} \frac{m e^{\alpha}}{e^{\alpha m}} + \frac{1}{12} \frac{m}{e^{\alpha} e^{\alpha m}} + \frac{1}{12} \frac{e^{\alpha} m^3}{e^{\alpha m}} - \frac{1}{12} \frac{m^3}{e^{\alpha} e^{\alpha m}}$$

$$Smradi := \frac{1}{6} \cdot m \cdot (m^2 - 1) \cdot \exp(-m \cdot \alpha) \cdot sha;$$

$$Smradi := \frac{1}{6} m (m^2 - 1) e^{-\alpha m} \left(\frac{1}{2} e^{\alpha} - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right)$$

$$test := Sm - Smradi;$$

$$test := -\frac{1}{12} \frac{m e^\alpha}{e^\alpha m} + \frac{1}{12} \frac{m}{e^\alpha e^\alpha m} + \frac{1}{12} \frac{e^\alpha m^3}{e^\alpha m} - \frac{1}{12} \frac{m^3}{e^\alpha e^\alpha m} - \frac{1}{6} m (m^2 - 1) e^{-\alpha m} \left(\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right)$$

simplify((10))

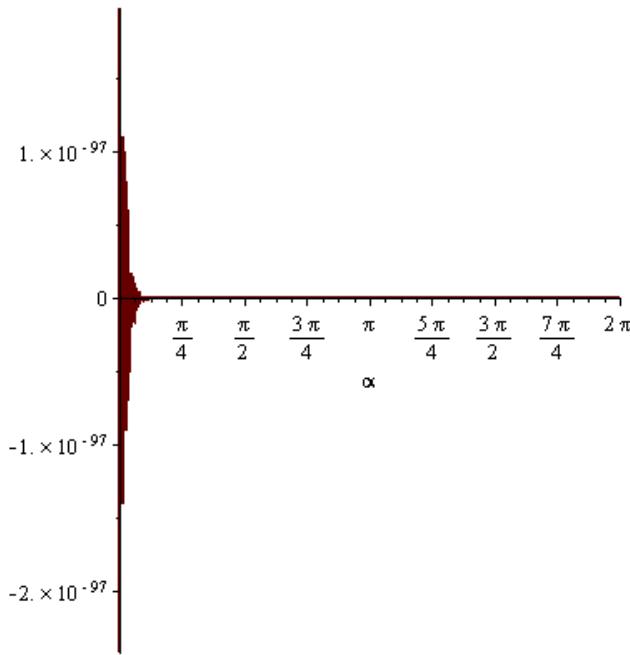
0

Ou seja, ambas as fórmulas são equivalentes.

test17 := subs(m = 17, test);

$$test17 := \frac{408 e^\alpha}{e^{17 \alpha}} - \frac{408}{e^\alpha e^{17 \alpha}} - 816 e^{-17 \alpha} \left(\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right)$$

*plot(test17, alpha = 0 .. 2*Pi);*



S17 := subs(m = 17, Sm);

$$S17 := \frac{408 e^\alpha}{e^{17 \alpha}} - \frac{408}{e^\alpha e^{17 \alpha}}$$

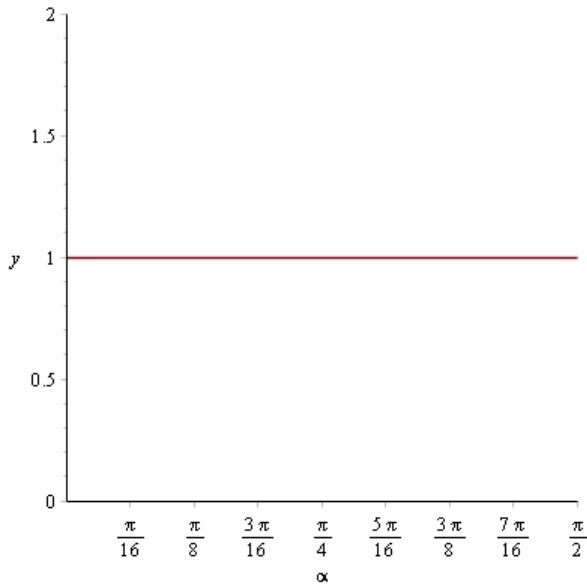
S17radi := subs(m = 17, Smradi);

$$S17radi := 816 e^{-17 \alpha} \left(\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right)$$

Test17div := S17 / S17radi;

$$Test17div := \frac{1}{816} \frac{\frac{408 e^\alpha}{e^{17 \alpha}} - \frac{408}{e^\alpha e^{17 \alpha}}}{e^{-17 \alpha} \left(\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right)}$$

plot(Test17div, alpha = 0 .. Pi/2, y = 0 .. 2);



2) Considerando $\alpha < 0$

$$cha := \frac{(\exp(\alpha) + \exp(-\alpha))}{2};$$

$$cha := \frac{1}{2} e^\alpha + \frac{1}{2} e^{-\alpha}$$

$$sha := \frac{(\exp(\alpha) - \exp(-\alpha))}{2};$$

$$sha := \frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha}$$

$$gn := \exp(n \cdot \alpha) \cdot (cha + n \cdot sha);$$

$$gn := e^{n \alpha} \left(n \left(\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) + \frac{1}{2} e^\alpha + \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right)$$

$$Expr := \frac{n \cdot gn \cdot (\exp(-(m-n) \cdot \alpha) - \exp((m-n) \cdot \alpha))}{2};$$

$$Expr := \frac{1}{2} n e^{n \alpha} \left(n \left(\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) + \frac{1}{2} e^\alpha + \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) (e^{-(m-n) \alpha} - e^{(m-n) \alpha})$$

$$Sm := expand(sum(Expr, n = 1 .. m - 1));$$

$$Sm := \frac{1}{12} m e^{\alpha m} e^\alpha - \frac{1}{12} \frac{m e^{\alpha m}}{e^\alpha} - \frac{1}{12} e^{\alpha m} e^\alpha m^3 + \frac{1}{12} \frac{e^{\alpha m} m^3}{e^\alpha}$$

$$Smradi := \frac{1}{6} \cdot m \cdot (m^2 - 1) \cdot \exp(m \cdot \alpha) \cdot (-sha);$$

$$Smradi := -\frac{1}{6} m (m^2 - 1) e^{\alpha m} \left(\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right)$$

$$test := Sm - Smradi;$$

$$test := \frac{1}{12} m e^{\alpha m} e^\alpha - \frac{1}{12} \frac{m e^{\alpha m}}{e^\alpha} - \frac{1}{12} e^{\alpha m} e^\alpha m^3 + \frac{1}{12} \frac{e^{\alpha m} m^3}{e^\alpha} + \frac{1}{6} m (m^2 - 1) e^{\alpha m} \left(\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right)$$

$$expand((22))$$

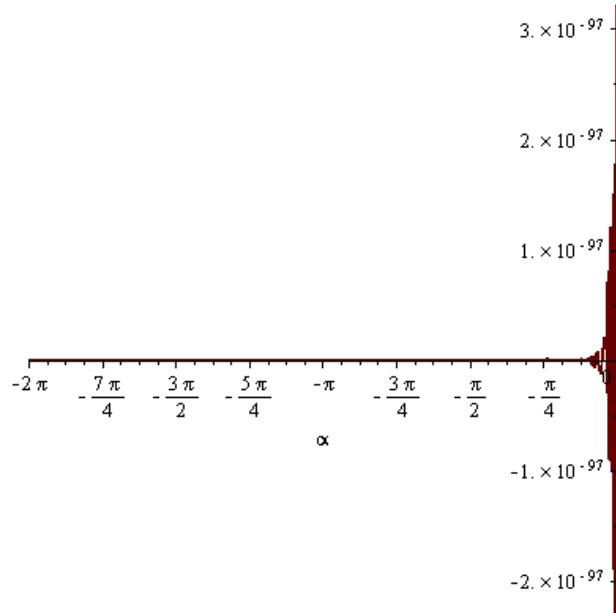
0

Ou seja, ambas as fórmulas são equivalentes!

test17 := subs(m = 17, test);

$$\text{test17} := -408 e^{17\alpha} e^\alpha + \frac{408 e^{17\alpha}}{e^\alpha} + 816 e^{17\alpha} \left(\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right)$$

*plot(test17, alpha = -2*Pi .. 0);*



S17 := subs(m = 17, Sm);

$$\text{S17} := -408 e^{17\alpha} e^\alpha + \frac{408 e^{17\alpha}}{e^\alpha}$$

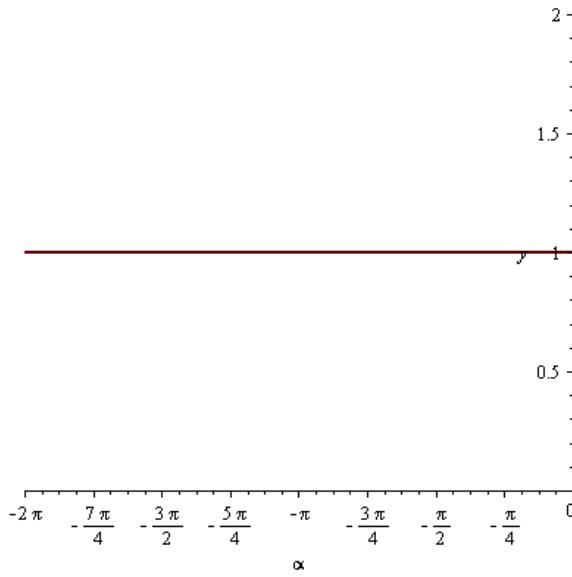
S17radi := subs(m = 17, Smradi);

$$\text{S17radi} := -816 e^{17\alpha} \left(\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right)$$

Test17div := S17 / S17radi;

$$\text{Test17div} := -\frac{1}{816} \frac{-408 e^{17\alpha} e^\alpha + \frac{408 e^{17\alpha}}{e^\alpha}}{e^{17\alpha} \left(\frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right)}$$

*plot(Test17div, alpha = -2*Pi .. 0, y = 0 .. 0.2);*



(52) -----

Substituindo a equação (51) na (49):

$$\begin{aligned}
 \text{Formula}_{51} &:= \frac{1}{6} \cdot m \cdot (m^2 - 1) \cdot e^{-m \cdot |\alpha|} \cdot \sinh(\alpha) : \\
 \# \Phi_m &= -2 \cdot K \cdot e^{-m \cdot |\alpha|} \cdot (\cosh(\alpha) + m \cdot \sinh(|\alpha|)) - 6 \cdot (\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty) \cdot \text{sign}(\alpha) \cdot \text{Formula}_{51} \rightarrow \\
 \rightarrow \Phi_m &= -2 K e^{-|\alpha| m} (\cosh(\alpha) + m \sinh(|\alpha|)) - (\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty) m (m^2 - 1) e^{-|\alpha| m} \sinh(|\alpha|) \\
 \text{Que é equivalente ao deduzido por Radi.}
 \end{aligned}$$

(53) -----

Multiplicando a Eq. (40) por $\sinh(m-n)\alpha$ e somando de $n=1$ até $m-1$

(40)

$$\# \sum_{n=1}^{m-1} (\Psi_{n-1} - 2 \cdot \Psi_n \cdot \cosh(\alpha) + \Psi_{n+1} - 2 \cdot \Psi_{En} \cdot \sinh(\alpha) + 2 \cdot n \cdot s_n) \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) = 0 \rightarrow$$

Podemos dividir em 5 somatórios:

(i)

$$\begin{aligned}
 \# \sum_{n=1}^{m-1} \Psi_{n-1} \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) &\rightarrow \text{com } N = n - 1 \rightarrow \sum_{N=0}^{m-2} \Psi_N \cdot \sinh((m - (N+1)) \cdot \alpha) \rightarrow \sum_{N=0}^{m-2} \\
 &= \sum_{N=1}^{m-1} + \sum_{N=0}^0 - \sum_{N=m-1}^{m-1} \rightarrow \\
 \# \rightarrow \sum_{N=0}^{m-2} \Psi_N \cdot \sinh((m - (N+1)) \cdot \alpha) &= \sum_{N=1}^{m-1} \Psi_N \cdot \sinh((m - 1 - N) \cdot \alpha)
 \end{aligned}$$

(ii)

$$\sum_{n=1}^{m-1} - 2 \cdot \Psi_n \cdot \cosh(\alpha) \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha)$$

(iii)

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{m-1} \Psi_{n+1} \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \rightarrow \text{com } N = n+1 \rightarrow \sum_{N=2}^m \Psi_N \cdot \sinh((m-(N-1)) \cdot \alpha) \rightarrow \sum_{N=2}^m \\ &= \sum_{N=1}^{m-1} + \sum_{N=m}^m - \sum_{N=1}^1 \rightarrow \end{aligned}$$

$$\# \rightarrow \sum_{N=2}^m \Psi_N \cdot \sinh((m-(N-1)) \cdot \alpha) = \sum_{N=1}^{m-1} \Psi_N \cdot \sinh((m+1-N) \cdot \alpha) + \Psi_m \cdot \sinh(\alpha)$$

(iv)

$$\begin{aligned} & \# \sum_{n=1}^{m-1} -2 \cdot \Psi_{En} \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \rightarrow \text{com (50)} \rightarrow \sum_{n=1}^{m-1} -2 \cdot 2 \cdot \tau_{12}^\infty \cdot n \cdot g_n \cdot \sinh(\alpha) \\ & \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \rightarrow \end{aligned}$$

$$\rightarrow -4 \cdot \tau_{12}^\infty \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sum_{n=1}^{m-1} n \cdot g_n \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha)$$

(v)

$$\# \sum_{n=1}^{m-1} 2 \cdot n \cdot s_n \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \rightarrow \text{com (29)} \rightarrow -8 \cdot \tau_{12}^\infty \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sum_{n=1}^{m-1} n \cdot g_n \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha)$$

Assim, somando (i)+(ii)+(iii)+(iv)+(v):

$$\begin{aligned} \#(i) & \rightarrow \sum_{n=1}^{m-1} \Psi_n \cdot \sinh((m-1-n) \cdot \alpha) \\ \#(ii) & \rightarrow \sum_{n=1}^{m-1} -2 \cdot \Psi_n \cdot \cosh(\alpha) \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \\ \#(iii) & \rightarrow \sum_{n=1}^{m-1} \Psi_n \cdot \sinh((m+1-n) \cdot \alpha) + \Psi_m \cdot \sinh(\alpha) \\ \#(iv) & \rightarrow -4 \cdot \tau_{12}^\infty \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sum_{n=1}^{m-1} n \cdot g_n \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \\ \#(v) & \rightarrow -8 \cdot \tau_{12}^\infty \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sum_{n=1}^{m-1} n \cdot g_n \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) \end{aligned}$$

Mas como (i) + (ii) + parte_(iii) =

$$\begin{aligned} & \Psi_n \cdot \sinh((m-1-n) \cdot \alpha) - 2 \cdot \Psi_n \cdot \cosh(\alpha) \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) + \Psi_n \cdot \sinh((m+1-n) \cdot \alpha) \\ & \Psi_n \sinh(\alpha(m-n-1)) - 2 \Psi_n \cosh(\alpha) \sinh((m-n)\alpha) + \Psi_n \sinh(\alpha(m-n+1)) \\ & \text{expandir} \end{aligned}$$

0

E como (iv) e (v) podem ser somados diretamente, temos que a soma total resulta:

$$\# \rightarrow \Psi_m \cdot \sinh(\alpha) - 12 \cdot \tau_{12}^\infty \cdot \sinh(\alpha) \cdot \sum_{n=1}^{m-1} n \cdot g_n \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) = 0 \rightarrow$$

$$\# \rightarrow \Psi_m = 12 \cdot \tau_{12}^\infty \sum_{n=1}^{m-1} n \cdot g_n \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha)$$

Que é a primeira fórmula de (53).

E, portanto, temos que, usando a fórmula (51):

(51)

$$\# \text{Formula}_{51} = \sum_{n=1}^{m-1} n \cdot g_n \cdot \sinh((m-n) \cdot \alpha) = \frac{1}{6} \cdot m \cdot (m^2 - 1) \cdot e^{-m|\alpha|} \cdot \sinh(\alpha)$$

Temos

$$\Psi_m = 12 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot \text{Formula}_{51}$$

$$\Psi_m = 2 \tau_{12}^{\infty} m (m^2 - 1) e^{-m|\alpha|} \sinh(\alpha)$$

Que é a segunda fórmula de (53)

7.12 Anexo 12 – Dedução das eqs.(45), (48) e (49) e programação para as eqs.(46)(47)

[numeração de fórmulas conforme Radi (2011)]

(54)-----

Igualando a equação

(37)

$$\phi_I := \frac{1}{2} \cdot (K \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) + B \cdot \sinh(2 \cdot \alpha)) - e^{-|\alpha|} \cdot (\sigma^{\infty}_{11} \cdot \cosh(\alpha) + \sigma^{\infty}_{22} \cdot \sinh(|\alpha|)) - p$$

À equação

(17)

$$\phi_I := A_I \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) + B_I + C_I \cdot \sinh(2 \cdot \alpha) :$$

Temos:

$$A_I \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) + B_I + C_I \cdot \sinh(2 \cdot \alpha) = \frac{K}{2} \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) + \frac{B}{2} \cdot \sinh(2 \cdot \alpha) - e^{-|\alpha|} \cdot (\sigma^{\infty}_{11} \cdot \cosh(\alpha) + \sigma^{\infty}_{22} \cdot \sinh(|\alpha|)) - p$$

→

$$A_I \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) + B_I + C_I \cdot \sinh(2 \cdot \alpha) - \frac{B}{2} \cdot \sinh(2 \cdot \alpha) = \frac{K}{2} \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) - e^{-|\alpha|} \cdot (\sigma^{\infty}_{11} \cdot \cosh(\alpha) + \sigma^{\infty}_{22} \cdot \sinh(|\alpha|)) - p$$

Que é a primeira equação da (54).

Também:

(33)

$$\Phi_{En} := n \cdot \phi_{linhan} \rightarrow \Phi_{EI} = \phi_{linha1}$$

E, como a derivada de phi_1 (17) é:

$$A_I \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) + B_I + C_I \cdot \sinh(2 \cdot \alpha)$$

$$\underline{A_I \cosh(2 \alpha) + B_I + C_I \sinh(2 \alpha)}$$

diferenciar em relação a. alpha

$$2A_I \sinh(2 \alpha) + 2C_I \cosh(2 \alpha)$$

Temos que:

$$\phi_{linha1} := 2A_I \sinh(2 \alpha) + 2C_I \cosh(2 \alpha) :$$

Ou seja,

$$\Phi_{EI} = \phi_{linha1}$$

$$\Phi_{EI} = 2A_I \sinh(2 \alpha) + 2C_I \cosh(2 \alpha)$$

Que, por outro lado, é igual a:

(47) (fórmula já corrigida)

$$\Phi_{EI} := 2 \cdot K \cdot e^{-|\alpha|} \cdot \sinh(\alpha) + B - (\sigma^{\infty}_{22} - \sigma^{\infty}_{11}) \cdot e^{-2 \cdot |\alpha|} \cdot \text{sign}(\alpha) :$$

Portanto:

$$2A_I \sinh(2 \alpha) + 2C_I \cosh(2 \alpha) - B = 2 \cdot K \cdot e^{-|\alpha|} \cdot \sinh(\alpha) - (\sigma^{\infty}_{22} - \sigma^{\infty}_{11}) \cdot e^{-2 \cdot |\alpha|} \cdot \text{sign}(\alpha)$$

Que é a segunda fórmula da (54).

(57)-----

Fazendo a derivada de:

(17)

$$\Psi_I := a_I \cdot \cosh(2 \cdot \alpha) + c_I \cdot \sinh(2 \cdot \alpha) : \\ \xrightarrow{\text{diferenciar em relação a. alpha}} 2 a_I \sinh(2 \alpha) + 2 c_I \cosh(2 \alpha)$$

Utilizando esta derivada na fórmula:

(38) (já corrigida)

$$\# \Psi_{linha1} = 2 \cdot \tau_{12}^{\infty} \cdot e^{-2 \cdot |\alpha|} \rightarrow \frac{\Psi_{linha1}}{2} = \tau_{12}^{\infty} \cdot e^{-2 \cdot |\alpha|}$$

$$a_I \sinh(2 \alpha) + c_I \cosh(2 \alpha) = \tau_{12}^{\infty} e^{-2 |\alpha|}$$

Que é a fórmula (57).

(58)-----

É necessário resolver o sistema linear formado pelas equações provenientes da equação (57) aplicada nas condições de contorno:

(57)

$$\sinh(2 \cdot \alpha) \cdot a_I + \cosh(2 \cdot \alpha) \cdot c_I = \tau_{12}^{\infty} e^{-2 \cdot |\alpha|}$$

Em alpha=alpha_1 e alpha=alpha_2:

$$\begin{cases} \sinh(2 \cdot \alpha_I) \cdot a_I + \cosh(2 \cdot \alpha_I) \cdot c_I = \tau_{12}^{\infty} e^{-2 \cdot |\alpha_I|} \\ \sinh(2 \cdot \alpha_2) \cdot a_I + \cosh(2 \cdot \alpha_2) \cdot c_I = \tau_{12}^{\infty} e^{-2 \cdot |\alpha_2|} \end{cases}$$

$$x=a_1 \quad y=c_1$$

$$solve(\{\sinh(2 \cdot \alpha_I) \cdot x + \cosh(2 \cdot \alpha_I) \cdot y = t \cdot \exp(-2 \cdot \text{abs}(\alpha_I)), \sinh(2 \cdot \alpha_2) \cdot x + \cosh(2 \cdot \alpha_2) \cdot y = t \cdot \exp(-2 \cdot \text{abs}(\alpha_2))\}, \{x, y\})$$

$$\begin{cases} x = -\frac{t \left(\cosh(2 \alpha_I) e^{-2 |\alpha_2|} - e^{-2 |\alpha_I|} \cosh(2 \alpha_2) \right)}{\cosh(2 \alpha_2) \sinh(2 \alpha_I) - \cosh(2 \alpha_I) \sinh(2 \alpha_2)}, y \\ = \frac{t \left(\sinh(2 \alpha_I) e^{-2 |\alpha_2|} - e^{-2 |\alpha_I|} \sinh(2 \alpha_2) \right)}{\cosh(2 \alpha_2) \sinh(2 \alpha_I) - \cosh(2 \alpha_I) \sinh(2 \alpha_2)} \end{cases}$$

$$a1Solve := (\alpha_I, \alpha_2) \rightarrow -\frac{t \left(\cosh(2 \alpha_I) e^{-2 |\alpha_2|} - e^{-2 |\alpha_I|} \cosh(2 \alpha_2) \right)}{\cosh(2 \alpha_2) \sinh(2 \alpha_I) - \cosh(2 \alpha_I) \sinh(2 \alpha_2)} :$$

$$c1Solve := (\alpha_I, \alpha_2) \rightarrow \frac{t \left(\sinh(2 \alpha_I) e^{-2 |\alpha_2|} - e^{-2 |\alpha_I|} \sinh(2 \alpha_2) \right)}{\cosh(2 \alpha_2) \sinh(2 \alpha_I) - \cosh(2 \alpha_I) \sinh(2 \alpha_2)} :$$

Isto é, está faltando um sinal negativo na segunda fórmula da eq (58) de Radi!

Programação para (55) e (56):

Aplicando $\alpha_1 = \alpha$ e $\alpha_2 = \beta$ em (54), obtemos um sistema linear. Para mostrar a (55) utiliza-se a (56).

Estratégia: comparação da subtração do valor de Radi (2011) com o obtido, transformando tudo em parâmetros.

Equivalência entre D (ou D_0) e o Determinante do sistema linear (Regra de Cramer)

MATRIZ

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccc}
 \cosh(2\alpha_1) & 1 & \sinh(2\alpha_1) & -\frac{1}{2} \sinh(2\alpha_1) \\
 \cosh(2\alpha_2) & 1 & \sinh(2\alpha_2) & -\frac{1}{2} \sinh(2\alpha_2) \\
 2 \sinh(2\alpha_1) & 0 & 2 \cosh(2\alpha_1) & -1 \\
 2 \sinh(2\alpha_2) & 0 & 2 \cosh(2\alpha_2) & -1
 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{\text{determinante}} \\
 -2 (\cosh(2\alpha_1) + \cosh(2\alpha_2) - 2) (\cosh(2\alpha_1) \cosh(2\alpha_2) - \sinh(2\alpha_1) \sinh(2\alpha_2) - 1)
 \end{array}$$

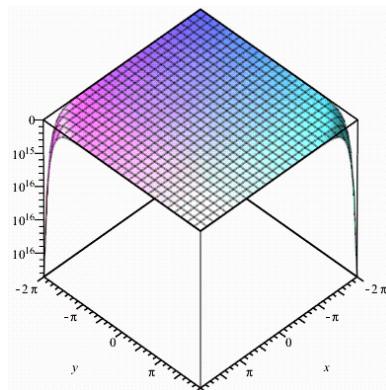
Determinante da Matriz:

$$DM := (\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow -2 (\cosh(2\alpha_1) + \cosh(2\alpha_2) - 2) (\cosh(2\alpha_1) \cosh(2\alpha_2) - \sinh(2\alpha_1) \sinh(2\alpha_2) - 1) :$$

D (ou "D Zero")

$$DZ := (\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow 2 \sinh(\alpha_1 - \alpha_2) (\sinh(\alpha_1)^2 + \sinh(\alpha_2)^2) :$$

$$DM(x, y) - DZ(x, y)$$



Ou seja, são equivalentes até $\alpha = -2\pi$

$$MATRIZ := \left[\begin{array}{cccc}
 \cosh(2\alpha_1) & 1 & \sinh(2\alpha_1) & -\frac{1}{2} \sinh(2\alpha_1) \\
 \cosh(2\alpha_2) & 1 & \sinh(2\alpha_2) & -\frac{1}{2} \sinh(2\alpha_2) \\
 2 \sinh(2\alpha_1) & 0 & 2 \cosh(2\alpha_1) & -1 \\
 2 \sinh(2\alpha_2) & 0 & 2 \cosh(2\alpha_2) & -1
 \end{array} \right] :$$

$$VETOR := \begin{bmatrix} A_I \\ B_I \\ C_I \\ B \end{bmatrix} :$$

$$RESPOSTA := \begin{bmatrix} f_I \\ f_2 \\ g_I \\ g_2 \end{bmatrix} :$$

MATRIZ.VETOR = RESPOSTA :

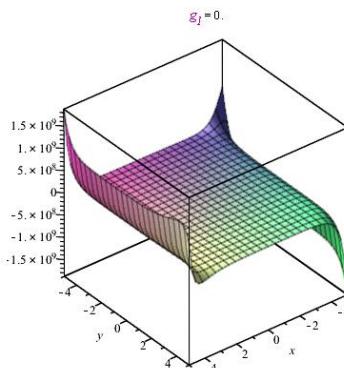
Regra de Cramer para encontrar x (ou A1):

$$\begin{bmatrix} f_I & 1 & \sinh(2\alpha_I) & -\frac{1}{2} \sinh(2\alpha_I) \\ f_2 & 1 & \sinh(2\alpha_2) & -\frac{1}{2} \sinh(2\alpha_2) \\ g_I & 0 & 2 \cosh(2\alpha_I) & -1 \\ g_2 & 0 & 2 \cosh(2\alpha_2) & -1 \end{bmatrix}$$

$\xrightarrow{\text{determinante}} AICramer$

$$AIRadi := (\alpha_I, \alpha_2) \rightarrow \cosh(\alpha_I + \alpha_2) \cdot (2 \cdot f_I \cdot \sinh(\alpha_2)^2 - 2 \cdot f_2 \cdot \sinh(\alpha_I)^2 + (g_I - g_2) \cdot \tanh(\alpha_I + \alpha_2)) :$$

$AICramer(x, y) = AIRadi(x, y)$



Tratei g_1, g_2, f_1, f_2 como parâmetros. Mesmo variando bastante, o patamar entre -2π e 2π se manteve inalterado.

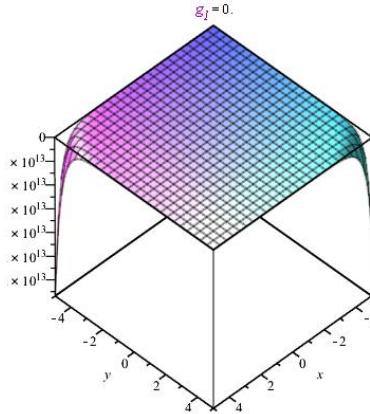
Regra de Cramer para encontrar y (ou B1):

$$\begin{bmatrix} \cosh(2\alpha_I) & f_I & \sinh(2\alpha_I) & -\frac{1}{2} \sinh(2\alpha_I) \\ \cosh(2\alpha_2) & f_2 & \sinh(2\alpha_2) & -\frac{1}{2} \sinh(2\alpha_2) \\ 2 \sinh(2\alpha_I) & g_I & 2 \cosh(2\alpha_I) & -1 \\ 2 \sinh(2\alpha_2) & g_2 & 2 \cosh(2\alpha_2) & -1 \end{bmatrix}$$

$\xrightarrow{\text{determinante}} BICramer$

$$BIRadi := (\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow \cosh(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot (2 \cdot f_2 \cdot \sinh(\alpha_1)^2 - 2 \cdot f_1 \cdot \sinh(\alpha_2)^2 - (g_1 + g_2) \cdot \tanh(\alpha_1 - \alpha_2) + g_2 \cdot \sinh(2 \cdot \alpha_1) - g_1 \cdot \sinh(2 \cdot \alpha_2))$$

$$BICramer(x, y) = BIRadi(x, y)$$



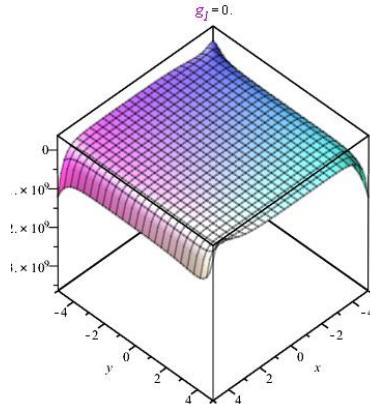
Regra de Cramer para encontrar z (ou C1):

$$\begin{bmatrix} \cosh(2 \alpha_1) & 1 & f_1 & -\frac{1}{2} \sinh(2 \alpha_1) \\ \cosh(2 \alpha_2) & 1 & f_2 & -\frac{1}{2} \sinh(2 \alpha_2) \\ 2 \sinh(2 \alpha_1) & 0 & g_1 & -1 \\ 2 \sinh(2 \alpha_2) & 0 & g_2 & -1 \end{bmatrix}$$

$\xrightarrow{\text{determinante}} C1Cramer := (\alpha_1, \alpha_2)$

$$C1Radi := (\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow \cosh(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot (g_2 - g_1 + (f_1 - f_2) \cdot \tanh(\alpha_1 + \alpha_2) + f_2 \cdot \sinh(2 \cdot \alpha_1) - f_1 \cdot \sinh(2 \cdot \alpha_2))$$

$$C1Cramer(x, y) = C1Radi(x, y)$$



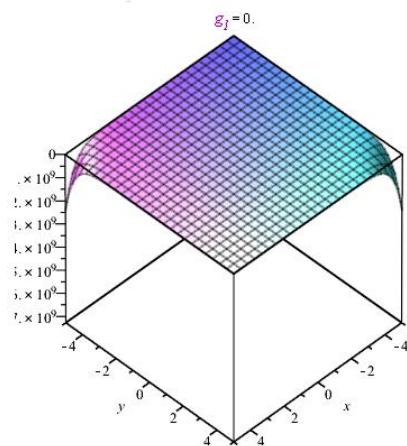
Regra de Cramer para encontrar w (ou B)

$$\begin{bmatrix} \cosh(2\alpha_1) & 1 & \sinh(2\alpha_1) & f_1 \\ \cosh(2\alpha_2) & 1 & \sinh(2\alpha_2) & f_2 \\ 2\sinh(2\alpha_1) & 0 & 2\cosh(2\alpha_1) & g_1 \\ 2\sinh(2\alpha_2) & 0 & 2\cosh(2\alpha_2) & g_2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{determinante}} BCramer := (\alpha_1, \alpha_2)$$

$$BRadi := (\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow 2 \cdot \cosh(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot ((f_1 + f_2) \cdot \tanh(\alpha_1 - \alpha_2) + g_2 - g_1) :$$

$$BCramer(x, y) - BRadi(x, y)$$



7.13 Anexo 13 – Dedução das eqs.(50) e (53) e programação para as eqs.(51), (52) e (54)

[numeração de fórmulas conforme Radi (2011)]

(59)-----

Introdução de (18) em (33)

(18)

$$\phi_n := (n, \alpha) \rightarrow A_n \cosh((n+1)\alpha) + B_n \cosh((n-1)\alpha) + C_n \sinh((n+1)\alpha) + D_n \sinh((n-1)\alpha) :$$

$$\phi_{linhan} := (n, \alpha) \rightarrow A_n \cdot (n+1) \cdot \sinh((n+1)\alpha) + B_n \cdot (n-1) \cdot \sinh((n-1)\alpha) + C_n \cdot (n+1) \cdot \cosh((n+1)\alpha) + D_n \cdot (n-1) \cdot \cosh((n-1)\alpha) :$$

(33)

$$\Phi_n := (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot \phi_n(n, \alpha)$$

$$(n-1) \cdot n \cdot (n+1) \left(A_n \cosh((n+1)\alpha) + B_n \cosh((n-1)\alpha) + C_n \sinh((n+1)\alpha) + D_n \sinh((n-1)\alpha) \right)$$

simplificar

$$n \left(A_n \cosh((n+1)\alpha) + B_n \cosh((n-1)\alpha) + C_n \sinh((n+1)\alpha) + D_n \sinh((n-1)\alpha) \right) (n^2 - 1)$$

$$\Phi_{En} := n \cdot \phi_{linhan}(n, \alpha)$$

$$n \left(A_n (n+1) \sinh((n+1)\alpha) + B_n (n-1) \sinh((n-1)\alpha) + C_n (n+1) \cosh((n+1)\alpha) + D_n (n-1) \cosh((n-1)\alpha) \right)$$

Que é igual às equações obtidas por Radi, em (59).

(60) e (61)-----

Feita por estratégia semelhante à das equações (55) e (56). “n” é tido como parâmetro (que foi variado, assim como os outros parâmetros). As equações de (61) são utilizadas na (60), então ambas serão juntamente analisadas.

Usando as equações de (59), avaliando em alpha=alpha_1 e alpha=alpha_2:

$$MATRIZ2 := (n^2 - 1) \cdot n$$

$$\begin{bmatrix} \cosh((n+1)\alpha_1) & \cosh((n-1)\alpha_1) & \sinh((n+1)\alpha_1) & \sinh((n-1)\alpha_1) \\ \cosh((n+1)\alpha_2) & \cosh((n-1)\alpha_2) & \sinh((n+1)\alpha_2) & \sinh((n-1)\alpha_2) \\ \sinh((n+1)\alpha_1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \sinh((n-1)\alpha_1) & \cosh((n+1)\alpha_1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \cosh((n-1)\alpha_1) \\ \sinh((n+1)\alpha_2) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \sinh((n-1)\alpha_2) & \cosh((n+1)\alpha_2) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \cosh((n-1)\alpha_2) \end{bmatrix} :$$

$$VETOR2 := \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{bmatrix} :$$

$$RESPOSTA2 := \begin{bmatrix} \Phi_{n1} \\ \Phi_{n2} \\ \Phi_{En1} \\ \Phi_{En2} \end{bmatrix} :$$

$$MATRIZ2.VETOR2 = RESPOSTA2 :$$

Considerando $n=5$

$n := 5$:

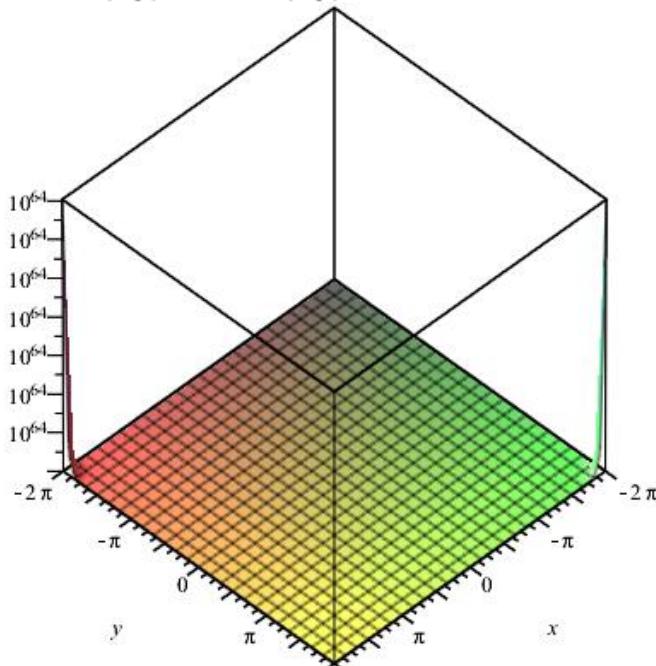
MATRIZ2

$$\begin{bmatrix} 120 \cosh(6 \alpha_1) & 120 \cosh(4 \alpha_1) & 120 \sinh(6 \alpha_1) & 120 \sinh(4 \alpha_1) \\ 120 \cosh(6 \alpha_2) & 120 \cosh(4 \alpha_2) & 120 \sinh(6 \alpha_2) & 120 \sinh(4 \alpha_2) \\ 120 \sinh(6 \alpha_1) & 2400 \sinh(4 \alpha_1) & 120 \cosh(6 \alpha_1) & 2400 \cosh(4 \alpha_1) \\ 120 \sinh(6 \alpha_2) & 2400 \sinh(4 \alpha_2) & 120 \cosh(6 \alpha_2) & 2400 \cosh(4 \alpha_2) \end{bmatrix}$$

determinante $\rightarrow HnCramer := (\alpha_1, \alpha_2)$:

$$HnRadi := (\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow 2 \cdot n \cdot (\sinh(n \cdot (\alpha_1 - \alpha_2))^2 - n^2 \cdot \sinh(\alpha_1 - \alpha_2)^2) :$$

$$HnCramer(x, y) - HnRadi(x, y)$$



Usando as funções

(61)

$$P_n := (\xi, \eta) \rightarrow \frac{(\sinh(\xi + n \cdot \eta) \cdot \sinh(n \cdot (\xi - \eta)) + n \cdot \sinh(\eta + n \cdot \xi) \cdot \sinh(\xi - \eta))}{n + 1} :$$

$$Q_n := (\xi, \eta) \rightarrow \cosh(\xi + n \cdot \eta) \cdot \sinh(n \cdot (\xi - \eta)) - n \cdot \cosh(\eta + n \cdot \xi) \cdot \sinh(\xi - \eta) :$$

$$U_n := (\xi, \eta) \rightarrow \frac{(\cosh(\xi + n \cdot \eta) \cdot \sinh(n \cdot (\xi - \eta)) + n \cdot \cosh(\eta + n \cdot \xi) \cdot \sinh(\xi - \eta))}{n + 1} :$$

$$V_n := (\xi, \eta) \rightarrow \sinh(\xi + n \cdot \eta) \cdot \sinh(n \cdot (\xi - \eta)) - n \cdot \sinh(\eta + n \cdot \xi) \cdot \sinh(\xi - \eta) :$$

$$P_{-n} := (\xi, \eta) \rightarrow \frac{(\sinh(\xi - n \cdot \eta) \cdot \sinh(-n \cdot (\xi - \eta)) - n \cdot \sinh(\eta - n \cdot \xi) \cdot \sinh(\xi - \eta))}{-n + 1} :$$

$$Q_{-n} := (\xi, \eta) \rightarrow \cosh(\xi - n \cdot \eta) \cdot \sinh(-n \cdot (\xi - \eta)) + n \cdot \cosh(\eta - n \cdot \xi) \cdot \sinh(\xi - \eta) :$$

$$U_{-n} := (\xi, \eta) \rightarrow \frac{(\cosh(\xi - n \cdot \eta) \cdot \sinh(-n \cdot (\xi - \eta)) - n \cdot \cosh(\eta - n \cdot \xi) \cdot \sinh(\xi - \eta))}{-n + 1} :$$

$$V_{-n} := (\xi, \eta) \rightarrow \sinh(\xi - n \cdot \eta) \cdot \sinh(-n \cdot (\xi - \eta)) + n \cdot \sinh(\eta - n \cdot \xi) \cdot \sinh(\xi - \eta) :$$

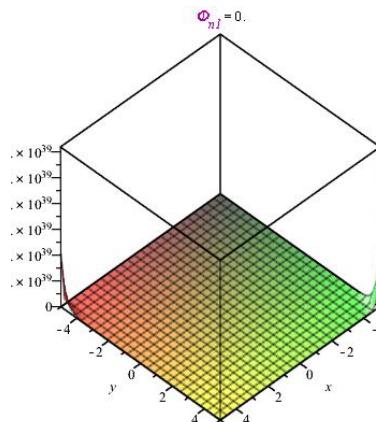
Para encontrar An (Cramer):

$$\begin{bmatrix} \Phi_{nl} & 120 \cosh(4 \alpha_1) & 120 \sinh(6 \alpha_1) & 120 \sinh(4 \alpha_1) \\ \Phi_{n2} & 120 \cosh(4 \alpha_2) & 120 \sinh(6 \alpha_2) & 120 \sinh(4 \alpha_2) \\ \Phi_{Enl} & 2400 \sinh(4 \alpha_1) & 120 \cosh(6 \alpha_1) & 2400 \cosh(4 \alpha_1) \\ \Phi_{En2} & 2400 \sinh(4 \alpha_2) & 120 \cosh(6 \alpha_2) & 2400 \cosh(4 \alpha_2) \end{bmatrix}$$

determinante $\rightarrow AnCramer := (\alpha_1, \alpha_2)$

$$AnRadi := (\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow P_n(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Phi_{nl} + P_n(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Phi_{n2} + Q_n(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Phi_{Enl} + Q_n(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Phi_{En2}:$$

$$AnCramer(x, y) = AnRadi(x, y)$$



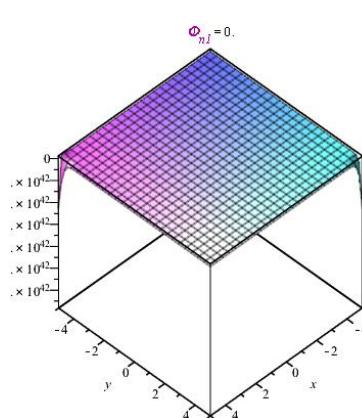
Para encontrar Bn (Cramer):

$$\begin{bmatrix} 120 \cosh(6 \alpha_1) & \Phi_{nl} & 120 \sinh(6 \alpha_1) & 120 \sinh(4 \alpha_1) \\ 120 \cosh(6 \alpha_2) & \Phi_{n2} & 120 \sinh(6 \alpha_2) & 120 \sinh(4 \alpha_2) \\ 120 \sinh(6 \alpha_1) & \Phi_{Enl} & 120 \cosh(6 \alpha_1) & 2400 \cosh(4 \alpha_1) \\ 120 \sinh(6 \alpha_2) & \Phi_{En2} & 120 \cosh(6 \alpha_2) & 2400 \cosh(4 \alpha_2) \end{bmatrix}$$

determinante $\rightarrow BnCramer := (\alpha_1, \alpha_2)$

$$BnRadi := (\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow P_{-n}(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Phi_{nl} + P_{-n}(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Phi_{n2} + Q_{-n}(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Phi_{Enl} + Q_{-n}(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Phi_{En2}:$$

$$BnCramer(x, y) = BnRadi(x, y)$$



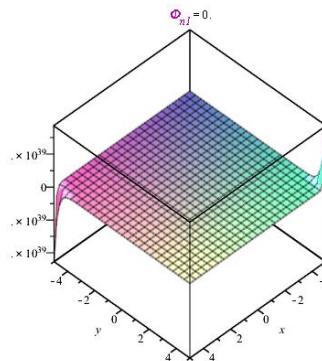
Para encontrar C_n (Cramer):

$$\begin{bmatrix} 120 \cosh(6 \alpha_1) & 120 \cosh(4 \alpha_1) & \Phi_{n1} & 120 \sinh(4 \alpha_1) \\ 120 \cosh(6 \alpha_2) & 120 \cosh(4 \alpha_2) & \Phi_{n2} & 120 \sinh(4 \alpha_2) \\ 120 \sinh(6 \alpha_1) & 2400 \sinh(4 \alpha_1) & \Phi_{En1} & 2400 \cosh(4 \alpha_1) \\ 120 \sinh(6 \alpha_2) & 2400 \sinh(4 \alpha_2) & \Phi_{En2} & 2400 \cosh(4 \alpha_2) \end{bmatrix}$$

determinante $\rightarrow CnCramer := (\alpha_1, \alpha_2)$

$$CnRadi := (\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow - (U_n(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Phi_{n1} + U_n(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Phi_{n2} + (V_n(\alpha_1, \alpha_2) + \cosh(2 \cdot n \cdot \alpha_2 - (n-1) \cdot \alpha_1)) \cdot \Phi_{En1} + V_n(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Phi_{En2}) :$$

$$CnCramer(x, y) - CnRadi(x, y)$$



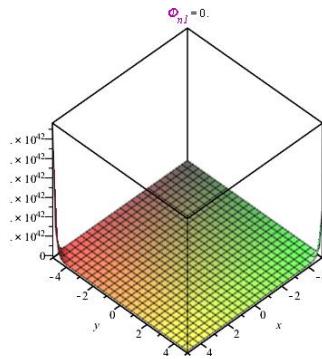
Para encontrar D_n (Cramer):

$$\begin{bmatrix} 120 \cosh(6 \alpha_1) & 120 \cosh(4 \alpha_1) & 120 \sinh(6 \alpha_1) & \Phi_{n1} \\ 120 \cosh(6 \alpha_2) & 120 \cosh(4 \alpha_2) & 120 \sinh(6 \alpha_2) & \Phi_{n2} \\ 120 \sinh(6 \alpha_1) & 2400 \sinh(4 \alpha_1) & 120 \cosh(6 \alpha_1) & \Phi_{En1} \\ 120 \sinh(6 \alpha_2) & 2400 \sinh(4 \alpha_2) & 120 \cosh(6 \alpha_2) & \Phi_{En2} \end{bmatrix}$$

determinante $\rightarrow DnCramer := (\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow 1728000 \cosh(4 \alpha_2) \cosh(6 \alpha_1)^2 \Phi_{En2}$

$$DnRadi := (\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow U_{-n}(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Phi_{n1} + U_{-n}(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Phi_{n2} + V_{-n}(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Phi_{En1} + V_{-n}(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Phi_{En2} :$$

$$DnCramer(x, y) - DnRadi(x, y)$$



(62)-----

Inserindo (19) em (34)

(19)

$$\begin{aligned}\psi_n &:= (n, \alpha) \rightarrow a_n \cosh((n+1)\alpha) + b_n \cosh((n-1)\alpha) + c_n \sinh((n+1)\alpha) + d_n \sinh((n-1)\alpha) : \\ \psi_{linhan} &:= (n, \alpha) \rightarrow a_n \cdot (n+1) \cdot \sinh((n+1)\alpha) + b_n \cdot (n-1) \cdot \sinh((n-1)\alpha) + c_n \cdot (n+1) \cdot \cosh((n+1)\alpha) \\ &\quad + d_n \cdot (n-1) \cdot \cosh((n-1)\alpha) :\end{aligned}$$

(34)

$$\Psi_n := (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot \psi_n(n, \alpha)$$

$$(n-1) \cdot n \cdot (n+1) \left(a_n \cosh((n+1)\alpha) + b_n \cosh((n-1)\alpha) + c_n \sinh((n+1)\alpha) + d_n \sinh((n-1)\alpha) \right)$$

$$\Psi_{En} := n \cdot \psi_{linhan}(n, \alpha)$$

$$n \left(a_n (n+1) \sinh((n+1)\alpha) + b_n (n-1) \sinh((n-1)\alpha) + c_n (n+1) \cosh((n+1)\alpha) + d_n (n-1) \cosh((n-1)\alpha) \right)$$

Dai, nota-se que a primeira fórmula é igual à do Radi, mas a segunda difere: Radi esqueceu de trocar os operadores ($\cosh \leftrightarrow \sinh$), pois estes foram derivados.

(63)-----

Usando as fórmulas de (62) [corrigidas] e as avaliando em $\alpha = \alpha_1$ e $\alpha = \alpha_2$, temos:

$$MATEIRIZ3 := \begin{bmatrix} n \cdot (n^2 - 1) \cdot \cosh((n+1)\alpha_1) & n \cdot (n^2 - 1) \cdot \cosh((n-1)\alpha_1) & n \cdot (n^2 - 1) \cdot \sinh((n+1)\alpha_1) & n \cdot (n^2 - 1) \cdot \sinh((n-1)\alpha_1) \\ n \cdot (n^2 - 1) \cdot \cosh((n+1)\alpha_2) & n \cdot (n^2 - 1) \cdot \cosh((n-1)\alpha_2) & n \cdot (n^2 - 1) \cdot \sinh((n+1)\alpha_2) & n \cdot (n^2 - 1) \cdot \sinh((n-1)\alpha_2) \\ n \cdot (n+1) \cdot \sinh((n+1)\alpha_1) & n \cdot (n-1) \cdot \sinh((n-1)\alpha_1) & n \cdot (n+1) \cdot \cosh((n+1)\alpha_1) & n \cdot (n-1) \cdot \cosh((n-1)\alpha_1) \\ n \cdot (n+1) \cdot \sinh((n+1)\alpha_2) & n \cdot (n-1) \cdot \sinh((n-1)\alpha_2) & n \cdot (n+1) \cdot \cosh((n+1)\alpha_2) & n \cdot (n-1) \cdot \cosh((n-1)\alpha_2) \end{bmatrix} ;$$

$$VETOR3 := \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix} ;$$

$$RESPOSTA3 := \begin{bmatrix} \Psi_{n1} \\ \Psi_{n2} \\ \Psi_{En1} \\ \Psi_{En2} \end{bmatrix} ;$$

$$MATEIRIZ3 \cdot VETOR3 = RESPOSTA3 ;$$

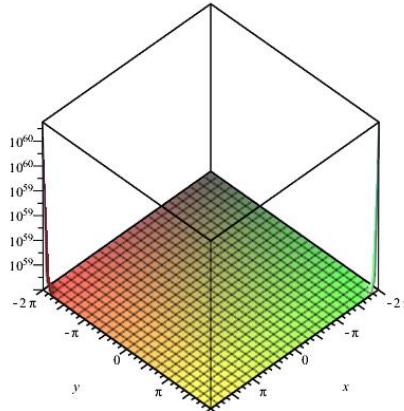
MATEIRIZ3

$$\begin{bmatrix} 120 \cosh(6\alpha_1) & 120 \cosh(4\alpha_1) & 120 \sinh(6\alpha_1) & 120 \sinh(4\alpha_1) \\ 120 \cosh(6\alpha_2) & 120 \cosh(4\alpha_2) & 120 \sinh(6\alpha_2) & 120 \sinh(4\alpha_2) \\ 30 \sinh(6\alpha_1) & 20 \sinh(4\alpha_1) & 30 \cosh(6\alpha_1) & 20 \cosh(4\alpha_1) \\ 30 \sinh(6\alpha_2) & 20 \sinh(4\alpha_2) & 30 \cosh(6\alpha_2) & 20 \cosh(4\alpha_2) \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{determinante}} HnCramer2 := (\alpha_1, \alpha_2)$$

$$HnRadi := (\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow 2 \cdot n \cdot (\sinh(n \cdot (\alpha_1 - \alpha_2))^2 - n^2 \cdot \sinh(\alpha_1 - \alpha_2)^2) :$$

$$HnCramer2(x, y) - HnRadi(x, y)$$



Usando as funções

(61)

$$P_n := (\xi, \eta) \rightarrow \frac{(\sinh(\xi + n \cdot \eta) \cdot \sinh(n \cdot (\xi - \eta)) + n \cdot \sinh(\eta + n \cdot \xi) \cdot \sinh(\xi - \eta))}{n + 1} :$$

$$Q_n := (\xi, \eta) \rightarrow \cosh(\xi + n \cdot \eta) \cdot \sinh(n \cdot (\xi - \eta)) - n \cdot \cosh(\eta + n \cdot \xi) \cdot \sinh(\xi - \eta) :$$

$$U_n := (\xi, \eta) \rightarrow \frac{(\cosh(\xi + n \cdot \eta) \cdot \sinh(n \cdot (\xi - \eta)) + n \cdot \cosh(\eta + n \cdot \xi) \cdot \sinh(\xi - \eta))}{n + 1} :$$

$$V_n := (\xi, \eta) \rightarrow \sinh(\xi + n \cdot \eta) \cdot \sinh(n \cdot (\xi - \eta)) - n \cdot \sinh(\eta + n \cdot \xi) \cdot \sinh(\xi - \eta) :$$

$$P_{-n} := (\xi, \eta) \rightarrow \frac{(\sinh(\xi - n \cdot \eta) \cdot \sinh(-n \cdot (\xi - \eta)) - n \cdot \sinh(\eta - n \cdot \xi) \cdot \sinh(\xi - \eta))}{-n + 1} :$$

$$Q_{-n} := (\xi, \eta) \rightarrow \cosh(\xi - n \cdot \eta) \cdot \sinh(-n \cdot (\xi - \eta)) + n \cdot \cosh(\eta - n \cdot \xi) \cdot \sinh(\xi - \eta) :$$

$$U_{-n} := (\xi, \eta) \rightarrow \frac{(\cosh(\xi - n \cdot \eta) \cdot \sinh(-n \cdot (\xi - \eta)) - n \cdot \cosh(\eta - n \cdot \xi) \cdot \sinh(\xi - \eta))}{-n + 1} :$$

$$V_{-n} := (\xi, \eta) \rightarrow \sinh(\xi - n \cdot \eta) \cdot \sinh(-n \cdot (\xi - \eta)) + n \cdot \sinh(\eta - n \cdot \xi) \cdot \sinh(\xi - \eta) :$$

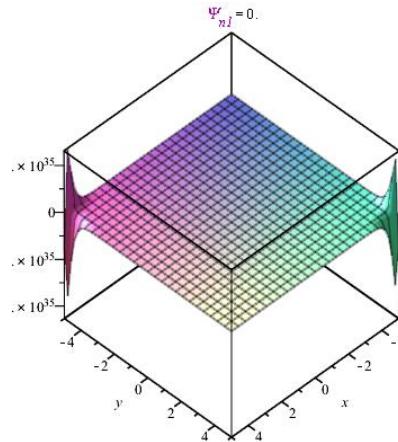
Para encontrar a_n (Cramer):

$$\begin{bmatrix} \Psi_{n1} & 120 \cosh(4 \alpha_1) & 120 \sinh(6 \alpha_1) & 120 \sinh(4 \alpha_1) \\ \Psi_{n2} & 120 \cosh(4 \alpha_2) & 120 \sinh(6 \alpha_2) & 120 \sinh(4 \alpha_2) \\ \Psi_{En1} & 20 \sinh(4 \alpha_1) & 30 \cosh(6 \alpha_1) & 20 \cosh(4 \alpha_1) \\ \Psi_{En2} & 20 \sinh(4 \alpha_2) & 30 \cosh(6 \alpha_2) & 20 \cosh(4 \alpha_2) \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{determinante}} anCramer2 := (\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow 72000 \cosh(4 \alpha_2)^2 \cosh(6 \alpha_1) \Psi_{n1}$$

$$anRadi := (\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow P_n(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Psi_{n1} + P_n(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Psi_{n2} + Q_n(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Psi_{En1} + Q_n(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Psi_{En2} :$$

$$anCramer2(x, y) - anRadi(x, y)$$



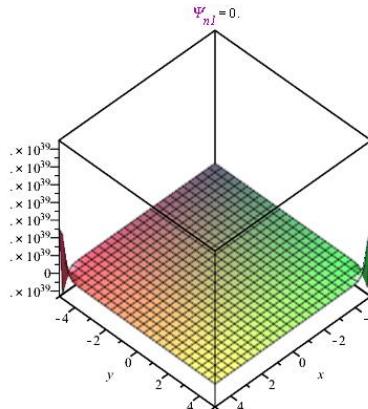
Para encontrar b_n (Cramer):

$$\begin{bmatrix} 120 \cosh(6 \alpha_1) & \Psi_{nl} & 120 \sinh(6 \alpha_1) & 120 \sinh(4 \alpha_1) \\ 120 \cosh(6 \alpha_2) & \Psi_{n2} & 120 \sinh(6 \alpha_2) & 120 \sinh(4 \alpha_2) \\ 30 \sinh(6 \alpha_1) & \Psi_{Enl} & 30 \cosh(6 \alpha_1) & 20 \cosh(4 \alpha_1) \\ 30 \sinh(6 \alpha_2) & \Psi_{En2} & 30 \cosh(6 \alpha_2) & 20 \cosh(4 \alpha_2) \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{determinante}} bnCramer2 := (\alpha_1, \alpha_2)$$

$$bnRadi := (\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow P_{-n}(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Psi_{nl} + P_{-n}(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Psi_{n2} + Q_{-n}(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Psi_{Enl} + Q_{-n}(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Psi_{En2}$$

$$bnCramer2(x, y) - bnRadi(x, y)$$



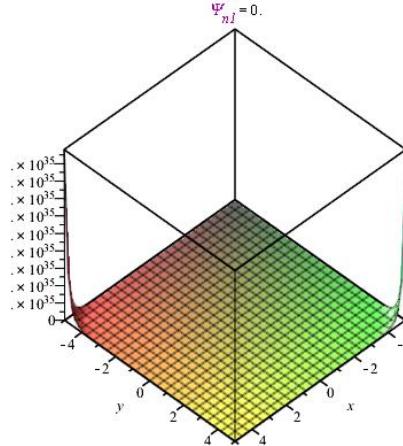
Para encontrar c_n (Cramer):

$$\begin{bmatrix} 120 \cosh(6 \alpha_1) & 120 \cosh(4 \alpha_1) & \Psi_{nl} & 120 \sinh(4 \alpha_1) \\ 120 \cosh(6 \alpha_2) & 120 \cosh(4 \alpha_2) & \Psi_{n2} & 120 \sinh(4 \alpha_2) \\ 30 \sinh(6 \alpha_1) & 20 \sinh(4 \alpha_1) & \Psi_{Enl} & 20 \cosh(4 \alpha_1) \\ 30 \sinh(6 \alpha_2) & 20 \sinh(4 \alpha_2) & \Psi_{En2} & 20 \cosh(4 \alpha_2) \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{determinante}} cnCramer2 := (\alpha_1, \alpha_2)$$

$$cnRadi := (\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow - (U_n(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Psi_{nl} + U_n(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Psi_{n2} + (V_n(\alpha_1, \alpha_2) + \cosh(2 \cdot n \cdot \alpha_2 - (n-1) \cdot \alpha_1)) \cdot \Psi_{Enl} + V_n(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Psi_{En2}) :$$

$$cnCramer2(x, y) - cnRadi(x, y)$$



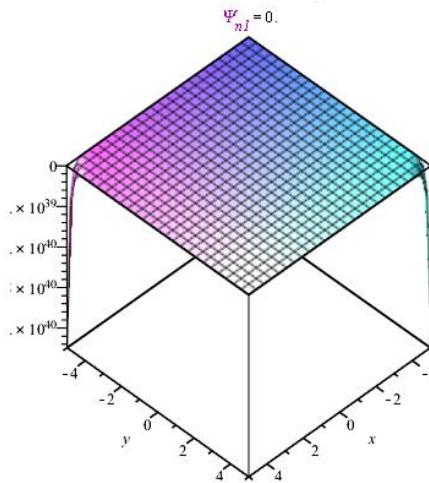
Para encontrar d_n (Cramer):

$$\begin{bmatrix} 120 \cosh(6 \alpha_1) & 120 \cosh(4 \alpha_1) & 120 \sinh(6 \alpha_1) & \Psi_{nl} \\ 120 \cosh(6 \alpha_2) & 120 \cosh(4 \alpha_2) & 120 \sinh(6 \alpha_2) & \Psi_{n2} \\ 30 \sinh(6 \alpha_1) & 20 \sinh(4 \alpha_1) & 30 \cosh(6 \alpha_1) & \Psi_{Enl} \\ 30 \sinh(6 \alpha_2) & 20 \sinh(4 \alpha_2) & 30 \cosh(6 \alpha_2) & \Psi_{En2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{determinante}} dnCramer2 := (\alpha_1, \alpha_2)$$

$$dnRadi := (\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow U_{-n}(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Psi_{nl} + U_{-n}(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Psi_{n2} + V_{-n}(\alpha_1, \alpha_2) \cdot \Psi_{Enl} + V_{-n}(\alpha_2, \alpha_1) \cdot \Psi_{En2} :$$

$$dnCramer2(x, y) - dnRadi(x, y)$$



**7.14 Anexo 14 – Verificação do método de elementos finitos:
programação para o problema de Kirsch**

$$p_i := 1 :$$

$$\sigma_0 := 1 :$$

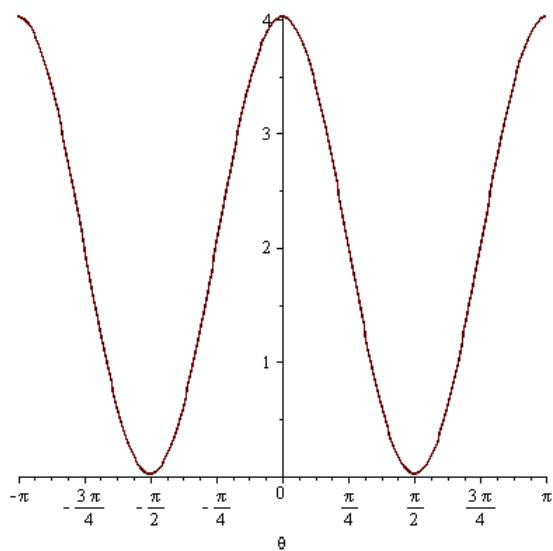
$$\epsilon := \frac{1}{10} :$$

$$\sigma_\theta := \theta \rightarrow \sigma_0 \cdot \left(1 - 2 \cdot \cos \left(2 \cdot \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right) + \frac{p_i \cdot (1 + \epsilon^2)}{(1 - \epsilon^2)} :$$

$$\theta_i := -\pi :$$

$$\theta_f := +\pi :$$

$$\text{plot}(\sigma_\theta(\theta), \theta = \theta_i .. \theta_f)$$



8 APÊNDICES

8.1 Apêndice 1 – Rotação do tensor das tensões

Matriz de transformação (rotação em z):

$$M := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{transposta}} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{atribuir a um nome}} M_t$$

Tensor das tensões:

$$T := \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} :$$

Em coordenadas polares:

$$T_{polar} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta r} & \sigma_\theta \end{bmatrix} = M_t \cdot T \cdot M$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta r} & \sigma_\theta \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} (\cos(\theta) \sigma_x + \sin(\theta) \tau_{yx}) \cos(\theta) + (\cos(\theta) \tau_{xy} + \sin(\theta) \sigma_y) \sin(\theta), \right. \right. \\ \left. \left. -(\cos(\theta) \sigma_x + \sin(\theta) \tau_{yx}) \sin(\theta) + (\cos(\theta) \tau_{xy} + \sin(\theta) \sigma_y) \cos(\theta) \right], \right. \\ \left. \left[(\sin(\theta) \sigma_x + \cos(\theta) \tau_{yx}) \cos(\theta) + (-\sin(\theta) \tau_{xy} + \cos(\theta) \sigma_y) \sin(\theta), -(\sin(\theta) \sigma_x \right. \right. \\ \left. \left. + \cos(\theta) \tau_{yx}) \sin(\theta) + (-\sin(\theta) \tau_{xy} + \cos(\theta) \sigma_y) \cos(\theta) \right] \right]$$

Daí:

$$\sigma_r = T_{polar}(1, 1)$$

$$\sigma_r = (\cos(\theta) \sigma_x + \sin(\theta) \tau_{yx}) \cos(\theta) + (\cos(\theta) \tau_{xy} + \sin(\theta) \sigma_y) \sin(\theta)$$

$$\sigma_\theta = T_{polar}(2, 2)$$

$$\sigma_\theta = -(\sin(\theta) \sigma_x + \cos(\theta) \tau_{yx}) \sin(\theta) + (-\sin(\theta) \tau_{xy} + \cos(\theta) \sigma_y) \cos(\theta)$$

$$\tau_{r\theta} = T_{polar}(1, 2)$$

$$\tau_{r\theta} = -(\cos(\theta) \sigma_x + \sin(\theta) \tau_{yx}) \sin(\theta) + (\cos(\theta) \tau_{xy} + \sin(\theta) \sigma_y) \cos(\theta)$$